Volúmenes Finitos

Yarko Niño C. y Paulo Herrera R.

Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile

Semestre Primavera 2011

Leyes de Conservación

En términos generales, dado una función de flujo $\mathbf{f}$ de una variable u, que es conservada dentro de un volumen fijo $\mathcal{V}$ con superficie Ω, la ecuación de balance se escribe como

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} u \mathrm{d}\mathcal{V}$$

Utilizando el teorema de la divergencia,

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\Omega = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{f} \mathrm{d}\mathcal{V}$$

Como el volume $\mathcal{V}$ es fijo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} u \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\mathcal{V}$$

Entonces,

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{f} \mathrm{d}\mathcal{V}$$

Finalmente, como esta relación es válida para cualquier volumen $\mathcal{V}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = 0$$

NOTA: Partimos de una Ley de Conservación definida sobre cierto volumen de control para derivar una ecuación diferencial parcial. Sin embargo, **la física del problema está completamente capturada en las ecuaciones originales de balance**.

Ejemplo: Ecuación de Advección-Difusión

Por ejemplo, la ecuación de advección-dispersión para casos con $\rho = \rho_0$ puede ser escrita definiendo un flujo,

$$\mathbf{f} = \mathbf{v}C - D\nabla C$$

Entonces la ecuación de balance de masas se escribe como,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = 0$$
$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}C) - D\nabla^2 C = 0$$

que es una EDP de segundo orden.

Volúmenes Finitos

Resolver,

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} u \mathrm{d}\mathcal{V}$$

en vez de,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = 0$$

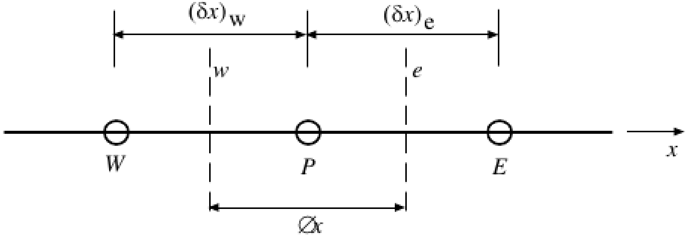
Para eso necesitamos definir **volúmenes finitos** y expresiones para evaluar **flujos**. Expresiones basadas en volúmenes finitos **satisfacen las ecuaciones de balance por construcción** si tenemos cuidado en definir las aproximaciones de los flujos.

Ejemplo: Aplicación de Volúmenes Finitos

Como ejemplo tomemos la ecuación de conducción de calor,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right) = S$$

Tomando el volumen de control,



La ecuación original puede ser reemplazada por la siguiente expresión,

$$F_w - F_e = S\Delta x$$

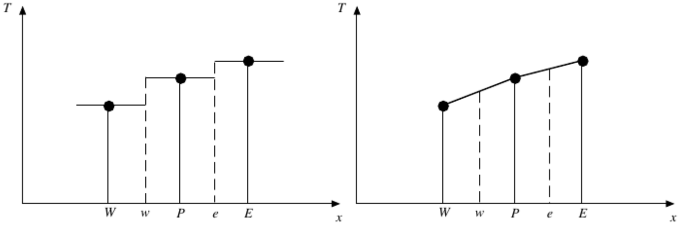
Ejemplo: Aplicación de Volúmenes Finitos (cont.)

$$F_w - F_e = S\Delta x$$

Los flujos son definidos como,

$$F_w = -K_w \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_w \qquad F_e = -K_e \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_e$$

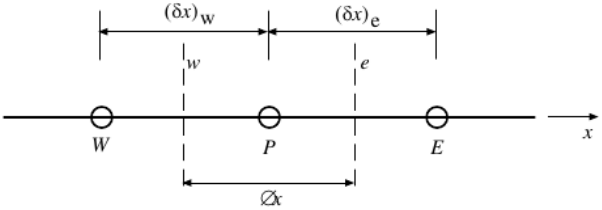
Para evaluar las derivadas debemos hacer una suposición respecto a la distribución de temperatura en cada volumen. Por ejemplo, constante o lineal.



Ejemplo: Aplicación de Volúmenes Finitos (cont.)

El supuesto de distribución constante no es bueno porque las derivadas no están definidas en los bordes de los volúmenes. Entonces asuminos distribución lineal,

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_w = \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_e = \frac{T_E - T_P}{\delta x_e}$$



Ejemplo: Aplicación de Volúmenes Finitos (cont.)

Reemplazando en,

$$F_w - F_e = S\Delta x$$

obtenemos,

$$-K_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} + K_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} = S\Delta x$$

Asumiendo medio homógeneo ($K_W = K_E = K$) y grilla regular ($\delta x_w = \delta x_e = \Delta x$),

$$\frac{K}{(\Delta x)^2}\left(T_E - 2T_P + T_W\right) = S$$

o,

$$\frac{K}{(\Delta x)^2}\left(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}\right) = S$$

Idéntica a la expresión de Diferencias Finitas!!!!

Ejemplo: Aplicación de Volúmenes Finitos (cont.)

Volviendo a la expresión de volúmenes finitos,

$$-K_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} + K_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} = S\Delta x$$

podemos escribir está expresión de forma más económica,

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b$$

donde,

$$a_E = \frac{K_e}{\delta x_e}; \quad a_w = \frac{K_w}{\delta x_w}; \quad a_P = a_E + a_W; \quad b = S\Delta x$$

Extendiendo a 2D y 3D,

$$a_P T_P = \sum_i a_i T_i + b; \quad i = \text{vecinos}$$

Volúmenes Finitos: Condiciones de Conservación

$$a_P T_P = \sum_i a_i T_i + b; \quad i = \text{vecinos}$$

Entonces, valor de T_P es una combinación lineal de los valores de T en los nodos vecinos. Esto implica que los coeficientes a_i deben satisfacer ciertas restricciones,

- $a_i > 0$. Está condición es directa de la expresión anterior, pero también tiene bases físicas porque aumentos en T_i deben contribuir de forma positiva en T_P.
- $a_P = \sum_i a_i$. Demostración simple, si sistema alcanza régimen estacionario $T_i = T_0$, entonces $T_P = T_0$ sólo si esta condición se cumple.

Volúmenes Finitos: Flujos

Una condición adicional para la consistencia de la formulación es que las **expresiones para evaluar los flujos deben ser continuas a través de los bordes.**

Por ejemplo, qué pasa si $K_P \neq K_E$?
Flujo F_e evaluado en volumen P,

$$F_e^P = -K_P \frac{T_E - T_P}{\delta x_e}$$

Flujo F_w evaluado en volumen E,

$$F_w^E = -K_E \frac{T_E - T_P}{\delta x_e}$$

Entonces, $F_e^P \neq F_w^E$. Esto no es físicamente posible y resulta en que la solución numérica no satisface la ecuación de conservación original. Además, esto se puede manifestar en problemas de estabilidad u oscilaciones de la solución.

Volúmenes Finitos: Flujos (cont.)

Discontinuidad de los flujos desaparece si usamos una aproximación única para K_e.

Por ejemplo, $K_e = (K_P + K_E)/2$. Esto resuelve el problema de discontinuidad pero los **flujos calculados con esta aproximación no son físicamente correctos**.

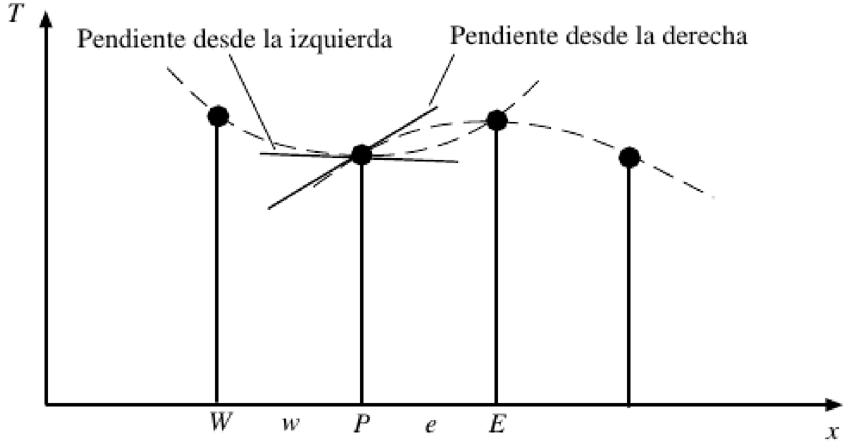
El coeficiente equivalente para el caso de coeficientes discontinuos es,

$$K_w = \frac{2K_P K_E}{K_P + K_E} = \frac{2}{\frac{1}{K_P} + \frac{1}{K_E}}$$

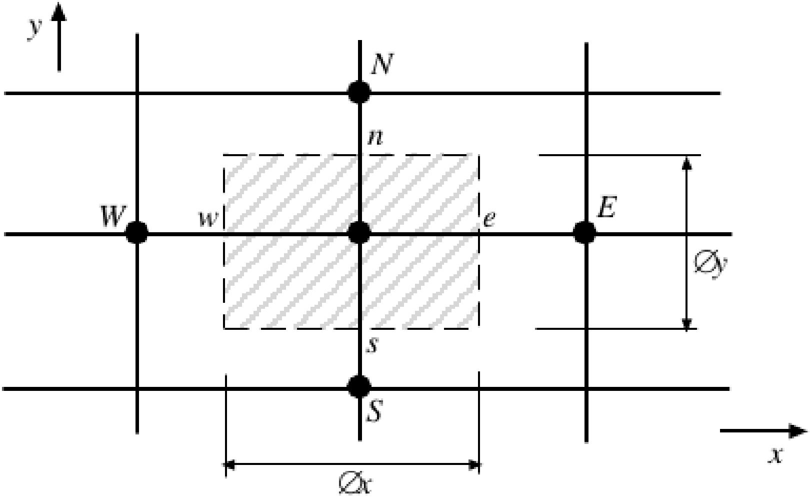
Entonces, el coeficiente equivalente es igual la **media armónica de los coeficientes**.

Volúmenes Finitos: Flujos (cont.)

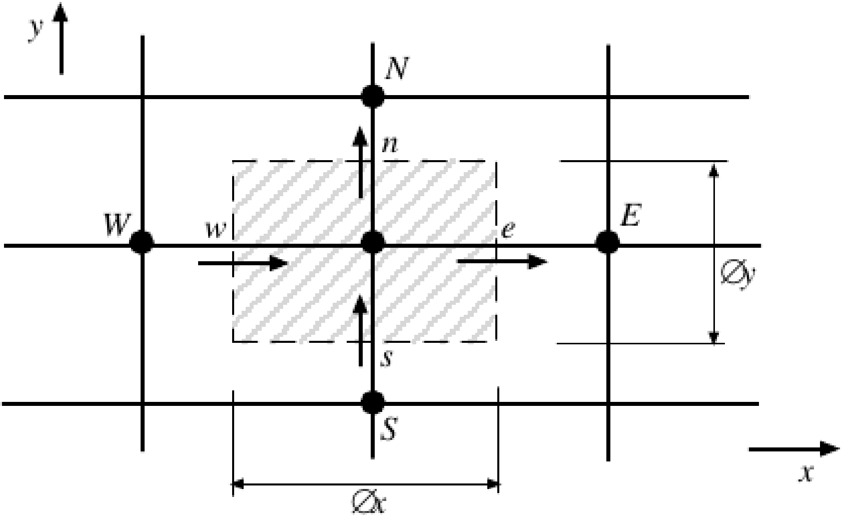
Los flujos también pueden ser discontinuos dependiendo de las funciones que se usen para aproximar las variables. Por ejemplo,



Extensión a múltiples dimensiones



Staggered grid



Condiciones de Borde