# Clasificación de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Yarko Niño C. y Paulo Herrera R.

Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile

Semestre Primavera 2011

# Calendario

Cátedras **sólo los miércoles**.

Laboratorios:

- Lab 1: Lunes 07 de noviembre.
- Lab 2: Lunes 21 de noviembre.
- Lab 3: Lunes 05 de diciembre.
- Lab 4: Lunes 19 de diciembre.
- Lab 5: Lunes 02 de enero.

Controles:

- Control 1: Miércoles 07 de diciembre.

# Conservation Laws

Muchos problemas en física e ingeniería pueden ser modelados a través de una ecuación de balance que incluya la integral de una función de flujo sobre la superficie de un volumen.

En términos generales, dado una función de flujo $\mathbf{f}$ de una variable $u$, que es conservada dentro de un volumen fijo $\mathcal{V}$ con superficie $\Omega$, la ecuación de balance se escribe como

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} u \mathrm{d}\mathcal{V} \tag{1}$$

# Conservation Laws

Muchos problemas en física e ingeniería pueden ser modelados a través de una ecuación de balance que incluya la integral de una función de flujo sobre la superficie de un volumen.

En términos generales, dado una función de flujo $\mathbf{f}$ de una variable $u$, que es conservada dentro de un volumen fijo $\mathcal{V}$ con superficie $\Omega$, la ecuación de balance se escribe como

$$\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_\mathcal{V} u \mathrm{d}\mathcal{V} \tag{1}$$

Utilizando el teorema de la divergencia,

$$\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\Omega = -\int_\mathcal{V} \nabla \cdot \mathbf{f} \mathrm{d}\mathcal{V} \tag{2}$$

# Conservation Laws (cont.)

Como el volume $\mathcal{V}$ es fijo,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} u \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\mathcal{V} \tag{3}$$

Entonces,

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{f}\mathrm{d}\mathcal{V} \tag{4}$$

# Conservation Laws (cont.)

Como el volume $\mathcal{V}$ es fijo,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} u \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\mathcal{V} \tag{3}$$

Entonces,

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{f} \mathrm{d}\mathcal{V} \tag{4}$$

Finalmente, como esta relación es válida para cualquier volumen $\mathcal{V}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = 0 \tag{5}$$

Expresiones de este tipo se conocen con "Leyes de Conservación" (*Conservation Laws*) e implican que la variable $u$ es conservada en $\mathcal{V}$.

# Conservation Laws (cont.)

Por ejemplo, la ecuación de advección-dispersión puede ser escrita asumiendo densidad constante definiendo un flujo

$$\mathbf{f} = \mathbf{v}C - D\nabla C \tag{6}$$

Entonces la ecuación de balance de masas se escribe como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}C) - D\nabla^2 C &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

que es una EDP de segundo orden.

# Ecuaciones diferenciales a derivadas parciales (EDPs)

Variable dependiente:

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Ecuación diferenciales a derivadas parciales (EDP) de orden $m$:

$$F(u, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m})$$

# Ecuaciones diferenciales a derivadas parciales (EDPs)

Variable dependiente:

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Ecuación diferenciales a derivadas parciales (EDP) de orden $m$:

$$F(u, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m})$$

$F$ es una EDP **lineal** si es una combinacion lineal de las derivadas de $u$, con coeficientes que pueden ser constantes o funciones de las variables independientes $x_i$.

$F$ es una EDP **cuasi lineal** si es lineal en las derivadas de mayor orden, pero los coeficientes de la combinacion pueden depender de las derivadas de menor orden y de las variables independientes.

Si la EDP no es lineal, ni cuasi lineal, entonces es **no lineal**. EDPs que son no lineales son mucho mas difíciles de resolver analíticamente que las ecuaciones lineales.

Si la EDP no es lineal, ni cuasi lineal, entonces es **no lineal**. EDPs que son no lineales son mucho mas difíciles de resolver analíticamente que las ecuaciones lineales.

Una transformación de coordenadas

$$(r, s) \to (x, y)$$

es no singular si,

$$|J| = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} \neq 0$$

# Ecuaciones de segundo orden

Notation: $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$

Consideramos EDPs de la forma:

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \tag{8}$$

En algunos casos es posible reducir esta ecuación a una forma canónica mediante una transformación de coordenadas no singulares, tal que:

$$r = r(x,y) \tag{9}$$
$$s = s(x,y) \tag{10}$$
$$u(x,y) = v(r,s) \tag{11}$$

# Ecuaciones de segundo orden (cont.)

Substituyendo y aplicando regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
&\left(Ar_x^2 + 2Br_x r_y + Cr_y^2\right) v_{rr} \\
&+ \left(Ar_x s_x + Br_x s_y + Br_y s_x + Cr_y s_y\right) v_{rs} \\
&+ \left(As_x^2 + 2Bs_x s_y + Cs_y^2\right) v_{ss} \\
&+ f(r, s, v, v_r, v_s) = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

# Ecuaciones de segundo orden (cont.)

Substituyendo y aplicando regla de la cadena:

$$
\begin{aligned}
&\left(Ar_x^2 + 2Br_x r_y + Cr_y^2\right) v_{rr} \\
&+ \left(Ar_x s_x + Br_x s_y + Br_y s_x + Cr_y s_y\right) v_{rs} \\
&+ \left(As_x^2 + 2Bs_x s_y + Cs_y^2\right) v_{ss} \\
&+ f(r, s, v, v_r, v_s) = 0
\end{aligned} \tag{12}
$$

Para eliminar los términos de más alto orden podemos escoger las funciones $r = r(x, y)$ y $s = s(x, y)$, tal que

$$
\begin{aligned}
\left(Ar_x^2 + 2Br_x r_y + Cr_y^2\right) = 0 \\
\left(As_x^2 + 2Bs_x s_y + Cs_y^2\right) = 0
\end{aligned}
$$

# Ecuaciones de segundo orden (cont.)

$$\left(Ar_x^2 + 2Br_x r_y + Cr_y^2\right) = 0$$
$$\left(As_x^2 + 2Bs_x s_y + Cs_y^2\right) = 0$$

En particular, podemos usar $r = w_1(x, y)$ y $s = w_2(x, y)$, donde $w_1$ y $w_2$ son soluciones de la ecuación:

$$Aw_x^2 + 2Bw_x w_y + Cw_y^2 = 0 \tag{13}$$

$$\left(Ar_x^2 + 2Br_x r_y + Cr_y^2\right) = 0$$
$$\left(As_x^2 + 2Bs_x s_y + Cs_y^2\right) = 0$$

En particular, podemos usar $r = w_1(x, y)$ y $s = w_2(x, y)$, donde $w_1$ y $w_2$ son soluciones de la ecuación:

$$Aw_x^2 + 2Bw_x w_y + Cw_y^2 = 0 \tag{13}$$

Esta ecuación es equivalente a:

$$\left(w_x + \lambda_1 w_y\right)\left(w_x + \lambda_2 w_y\right) = 0$$

# Ecuaciones de segundo orden (cont.)

$$Aw_x^2 + 2Bw_x w_y + Cw_y^2 = 0$$

$$\left(w_x + \lambda_1 w_y\right)\left(w_x + \lambda_2 w_y\right) = 0 \tag{14}$$

Entonces:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2B}{A} \tag{15}$$

y

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{C}{A} \tag{16}$$

# Ecuaciones de segundo orden (cont.)

$$Aw_x^2 + 2Bw_xw_y + Cw_y^2 = 0$$

$$\left(w_x + \lambda_1 w_y\right)\left(w_x + \lambda_2 w_y\right) = 0 \tag{14}$$

Entonces:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2B}{A} \tag{15}$$

y

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{C}{A} \tag{16}$$

De (15):

$$\lambda_2 = \frac{2B}{A} - \lambda_1 \tag{17}$$

# Ecuaciones de segundo orden (cont.)

De (15):

$$\lambda_2 = \frac{2B}{A} - \lambda_1 \tag{18}$$

Substituyendo en (16):

$$\lambda_1 \left( \frac{2B}{A} - \lambda_1 \right) = \frac{C}{A}$$
$$\lambda_1^2 - \frac{2B}{A}\lambda_1 + \frac{C}{A} = 0 \tag{19}$$

# Ecuaciones de segundo orden (cont.)

De (15):

$$\lambda_2 = \frac{2B}{A} - \lambda_1 \tag{18}$$

Substituyendo en (16):

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left( \frac{2B}{A} - \lambda_1 \right) &= \frac{C}{A} \\ \lambda_1^2 - \frac{2B}{A}\lambda_1 + \frac{C}{A} &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Entonces:

$$\lambda_1 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{20}$$

# Ecuaciones de segundo orden (cont.)

Finalmente de (18),

$$\lambda_2 = \frac{2B}{A} - \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{21}$$

Entonces las soluciones de (14) son:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{22}$$

# Ecuaciones de segundo orden (cont.)

Finalmente de (18),

$$\lambda_2 = \frac{2B}{A} - \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{21}$$

Entonces las soluciones de (14) son:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{22}$$

Tres casos posibles de acuerdo al signo del discriminante $\Delta = B^2 - AC$:

- $\Delta > 0$, EDP es **hiperbólica**
- $\Delta = 0$, EDP es **parabólica**
- $\Delta < 0$, EDP es **elíptica**

# EDPs Hiperbólicas

$\Delta = B^2 - AC > 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda_1$ y $\lambda_2$ son reales y distintas.

Por otra parte tomando $w(x, y) = c$, tenemos que:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = w_x + w_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{23}$$

$\Delta = B^2 - AC > 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1$ y $\lambda_2$ son reales y distintas.

Por otra parte tomando $w(x, y) = c$, tenemos que:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = w_x + w_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{23}$$

Pero, $w_x = -\lambda w_y$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lambda_1, \lambda_2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{24}$$

las coordenadas $w_1(x, y) = c_1$ y $w_2(x, y) = c_2$ son las **coordenadas características** de la EDP.

# EDPs Hiperbólicas

Ecuaciones hiperbólicas siempre pueden ser reducidas a la forma:

$$u_{xx} - u_{yy} = g(u_x, u_y, u, x, y)$$

Características:

- Las soluciones son de "tipo onda".
- Una pertubación en la condición inicial no es percibida por todos los puntos del dominio al mismo tiempo.
- En un sistema fijo de coordenadas, perturbaciones tienen una **velocidad finita de propagación**.
- La información viaja a lo largo de las características de la ecuación. La solución tiene un **limitado dominio de dependencia**.

Ejemplo: Ecuación de onda.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

en el intervalo $-\infty < x < \infty$, con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$

# EDPs Parabólicas

$\Delta = B^2 - AC = 0 \qquad \rightarrow \qquad$ una única solución real,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{B}{A}$$

Entonces la ecuación diferencial característica es

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{B}{A}$$

que tiene una sola solución.

# EDPs Parabólicas (cont.)

La forma canónica en este caso es

$$u_{xx} = g(u_x, u_y, u, x, y)$$

Características:

- Asociadas a procesos de difusión.
- A diferencia de las ecuaciones hiperbólicas, **no tiene limitado dominio de dependencia**.
- Solución en tiempo $t_0$ **depende de los valores en todo el dominio** (incluyendo en los bordes) en el tiempo $t < t_0$.

# EDPs Parabólicas (cont.)

Ejemplo: Ecuación de difusión.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Con condiciones iniciales y de borde:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0 \\ u(t, 0) &= U; \quad t > 0 \\ u(t, \infty) &= 0 \end{aligned}$$

# EDPs Elípticas

$\Delta = B^2 - AC < 0 \qquad \rightarrow \qquad$ soluciones complejas,

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{B \pm i\sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

Entonces la ecuación diferencial característica es

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{B \pm i\sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

# EDPs Elípticas (cont.)

La forma canónica en este caso es

$$u_{xx} + u_{yy} = g(u_x, u_y, u, x, y)$$

Características:

- Soluciones complejas de la ecuación característica indican que la **EDP no evoluciona con el tiempo**.
- Representan problemas con **condiciones de borde espaciales**.
- Valores de la solución dentro del dominio **dependen de las condiciones de borde**.

# EDPs Elípticas (cont.)

Ejemplo: Ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 u = 0; \qquad 0 \leq r < 1, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

con condiciones de borde,

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) = f(\theta)$$

Estas ecuaciones pueden ser usadas para modelar la distribución de temperatura en un disco de radio unitario.

# Problema "**bien puesto**" (*well posed problem*)

Solución satisface las siguientes condiciones:

- Existe.
- Es única.
- Depende continuamente de las condiciones iniciales y de borde.

# Condiciones de borde

Condiciones de borde pueden ser de distinto tipo:

- **Dirichlet**: $u(x) = g(x)$ en $\Omega$, donde $\Omega$ es la superficie del dominio.
- **Neumann**: $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = g(x)$, donde $\mathbf{n}$ es la normal a la superficie $\Omega$.
- **Robin**: $a_1 u(x) + a_2 \frac{\partial u}{\partial n} = g(x)$ en $\Omega$, donde $a_1 = a_1(x)$ y $a_2 = a_2(x)$.
- **Mixtas**: $u(x) = g_1(x)$, $x \in \Omega_1$ y $\frac{\partial u}{\partial n} = g(x)$, $x \in \Omega_2$, con $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$.