Diferencias Finitas (3)

Yarko Niño C. y Paulo Herrera R.

Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile

Semestre Primavera 2011

Errores, consistencia, estabilidad y convergencia

Calidad de una solución numérica depende de los siguientes conceptos:

- **Error de truncación**: Se debe a las aproximaciones **finitas** de las derivadas espaciales y temporales. Otra forma: expansión finita de las series que aproximan esas derivadas o aproximación discreta de una función continua.
- **Error de redondeo**: Se debe a la representación finita de números reales en computadores. También afecta la evaluación de soluciones analíticas.
- **Consistencia**: Una aproximación por DF es consistente si se puede demostrar que aproxima la solución real cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta t \to 0$.
- **Estabilidad**: Aplica a problemas transientes. Un algoritmo numérico es estable si los errores de cualquier origen no crecen desde un período transiente al siguiente.

Teorema de Equivalencia de Lax

Si un Problema de Valor Inicial es *bien puesto* y tiene una aproximación de diferencias finitas consistente, entonces la estabilidad de la solución es una condición necesaria y suficiente para que la **solución numérica converja hacia la solución real de la EDP**.

NOTA: En general es más simple demostrar la consistencia y estabilidad de una aproximación de DF que su convergencia.

Análisis de estabilidad

Consideremos la Ecuación de Difusión:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

La aproximación de diferencias finitas de primer orden explícita es:

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = \frac{D}{(\Delta x)^2}\left(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n\right)$$

o, definiendo $\mathcal{D} = D\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$,

$$C_i^{n+1} = \mathcal{D}\left(C_{i+1}^n - 2C_p^n + C_{p-1}^n\right) \qquad (1)$$

Debido al **error de redondeo**, la última ecuación no se puede resolver en forma exacta y el computador resuelve,

$$C_i^{n+1} + \epsilon_i^{n+1} = \mathcal{D}\left(\left[C_{i+1}^n + \epsilon_{i+1}^n\right] - 2\left[C_p^n + \epsilon_i^n\right] + \left[C_{p-1}^n + \epsilon_{i-1}^n\right]\right) \qquad (2)$$

Análisis de von Neumann

Sustrayendo ecuación (1) de ecuación (2),

$$\epsilon_i^{n+1} = \mathcal{D}\left(\epsilon_{i+1}^n - 2\epsilon_i^n + \epsilon_{i-1}^n\right) \tag{3}$$

Entonces, error de redondeo ϵ_i satisface la misma ecuación que la varible h_i.

Ahora asumimos que el error en cualquier nivel de tiempo puede ser aproximado por una serie de Fourier, tal que,

$$\epsilon_i^n = \sum_{k=0}^{N-1} A_k(n) e^{i\sigma_k x_i}$$

donde A_k es la amplitud del componente k, y σ_k es la frecuencia espacial o número de onda ($\Lambda_k = 2\pi/\sigma_k$ es la longitud de onda).

NOTA: Esto asume que los puntos de la grillas están separados por espaciamiento uniforme Δx.

Análisis de von Neumann (cont.)

Ahora sustituimos un término arbitrario de la serie de Fourier en la ecuación de propagación del error para enoncontrar el **factor de progagación**.

Como la ecuación de propagación es lineal y la serie de Fourier también es lineal, sólo necesitamos sustituir un término,

$$\epsilon_i^n = A_k(n) e^{i\sigma_k x_i}$$

entonces,

$$\epsilon_i^{n+1} = A_k(n+1) e^{i\sigma_k x_i}$$
$$\epsilon_{i+1}^n = A_k(n) e^{i\sigma_k (x_i + \Delta x) = A_k(n) e^{i\sigma_k x_i} e^{i\sigma_k \Delta x}}$$
$$\epsilon_{i-1}^n = A_k(n) e^{i\sigma_k (x_i - \Delta x) = A_k(n) e^{i\sigma_k x_i} e^{-i\sigma_k \Delta x}}$$

Análisis de von Neumann (cont.)

Sustituyendo en la ecuación para la propagación del error,

$$A_k(n+1) = A_k(n) + \mathcal{D}A_k(n)\left(e^{i\sigma_k\Delta x} - 2 + e^{-i\sigma_k\Delta x}\right)$$

Definiedo $\theta = \sigma_k\Delta x$ y usando las identidades trigonométricas: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$; $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ y $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$; obtenemos,

$$\begin{aligned} A_k(n+1) &= A_k(n) + 2\mathcal{D}A_k(n)\left(\cos(\theta) - 1\right) \\ &= A_k(n)\left(1 - 2\mathcal{D}\left[1 - \cos(\sigma_k\Delta x)\right]\right) \\ &= A_k(n)\Phi_k \end{aligned}$$

donde el factor de propagación $\Phi_k = 1 - 2\mathcal{D}[1 - \cos(\theta)]$.

Análisis de von Neumann (cont.)

Reemplazando en

$$\epsilon_i^{n+1} = A_k(n+1)e^{i\sigma_k x_i}$$

obtenemos,

$$\epsilon_i^{n+1} = \Phi_k \epsilon_i^n \qquad \text{o} \qquad \epsilon_i^{n+1} = \Phi_k^{n+1} \epsilon_i^0$$

Entonces, una condición necesaria para la estabilidad del método es,

$$|\Phi_k| \leq 1$$

lo que implica que,

$$-1 \leq 1 - 2\mathcal{D}[1 - \cos(\theta)] \leq 1$$

Análisis de von Neumann (cont.)

Condición para estabilidad,

$$-1 \leq 1 - 2\mathcal{D}[1 - \cos(\theta)] \leq 1$$

Límite superior siempre se cumple para $\mathcal{D} \geq 0$. Sin embargo, límite inferior requiere que,

$$-2 \leq -2\mathcal{D}(1 - \cos(\theta))$$
$$-2 \leq -4\mathcal{D}\sin^2(\theta/2)$$

esto último se cumple para,

$$\mathcal{D} \leq \frac{1}{2\sin^2(\theta/2)}$$

Análisis de von Neumann (cont.)

$$\mathcal{D} \leq \frac{1}{2\sin^2(\theta/2)}$$

Como $\sin(\theta) \leq 1$, la condición para la estabilidad del método es,

$$\frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} = \mathcal{D} \leq \frac{1}{2}$$

Esto significa que dado un espaciamiento de la grilla Δx, el espaciamiento temporal Δt debe ser tal que la escala de tiempo de difusión dentro de una celda de la grilla $(\Delta x)^2/D$ sea mayor o igual $2\Delta t$.

Estabilidad solución implícita para ecuación de difusión

Aproximación implícita,

$$C_i^{n+1} - C_i^n = \mathcal{D}\left(C_{i-1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i+1}^{n+1}\right)$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned}\epsilon_i^n &= A_k(n)e^{i\sigma_k x_i}\\ A_k(n+1) &= \Phi_k A_k(n)\end{aligned}$$

obtenemos,

$$\Phi_k = \frac{1}{1 + 2\mathcal{D}(1 - \cos(\sigma_k \Delta x))}$$

Entonces, $\Phi_k \leq 1$ siempre que $\mathcal{D} \geq 0 \Rightarrow$ la aproximación es incondicionalmente estable.

Estabilidad: Ecuaciíon de advección

Ecuación de advección,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u\frac{\partial C}{\partial x}$$

Utilizando una aproximación explde primer orden para la derivada temporal y una hacia adelante de primer orden para la derivada espacial, obtenemos

$$C_i^{n+1} - C_i^n = -\mathcal{U}\left(C_i^n - C_{i-1}^n\right)$$

donde $\mathcal{U} = u\Delta t/\Delta x$.
Reemplazando las expresiones para el error en la ecución de propagación obtenemos,

$$A_k(n+1) - A_k(n) = -\mathcal{U}A_k n\left[1 - e^{i\sigma_k \Delta x}\right]$$

Estabilidad: Ecuaciíon de advección (cont.)

En este caso el factor de amplificación es,

$$\Phi_k = 1 - \mathcal{U}(1 - \cos(\sigma_k \Delta x)) - i\,\mathcal{U}\sin(\sigma_k \Delta x))$$

En este caso la condición de estabilidad requiere que,

$$|\Phi_k| = \sqrt{\Phi_k \Phi_k^*} \leq 1$$

Desarrollando el algebra, se obtiene,

$$\mathcal{U}[1 - \cos(\sigma_k \Delta x)] + \cos(\sigma_k \Delta x) \leq 1$$

Esto se cumple para

$$\mathcal{U} \leq 1$$

Esta condición se conoce como Condición de Courant o Condición de Courant-Friedrich-Lewy (CFL). Al término $\mathcal{U} = u\Delta t/\Delta x$ se le denomina el **número de Courant** (o *CFL number*).

Estabilidad: Ecuación de Advección–Difusión

Procesos de transporte en medios acuáticos son usualmente modelados por la Ecuación de Advección-Difusión:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u\frac{\partial C}{\partial x}$$

Usando una aproximación explícita de primer orden hacia adelante para la primera derivada y una de segundo orden central para la segunda derivada espaciales, obtenemos,

$$C_i^{n+1} - C_i^n = \mathcal{D}\left(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{p-1}^n\right) - \mathcal{U}\left(C_i^n - C_{i-1}^n\right)$$

Aplicando el análisis de von Neumann encontramos que la condición de estabilidad es,

$$2\mathcal{D} + \mathcal{U} \leq 1 \qquad \Rightarrow$$

$$\Delta t \leq \left[\frac{2D}{(\Delta x)^2} + \frac{u}{\Delta x}\right]^{-1}$$

Estabilidad: Ecuación de Advección–Difusión

Finite Difference Solution of the Transport Equation
Summary of Amplification Factors

Time Stepping	Advection Term	ϕ_n	Stability
Explicit	Upstream	$1 - (2\mathcal{D} + \mathcal{U})(1 - \cos\sigma_n\Delta x) - i\mathcal{U}\sin\sigma_n\Delta x$	$2\mathcal{D} + \mathcal{U} \le 1$
Explicit	Central	$1 - 2\mathcal{D}(1 - \cos\sigma_n\Delta x) - i\mathcal{U}\sin\sigma_n\Delta x$	$\mathcal{D} \le \frac{1}{2}$, $\mathcal{U} \le 1$, $\mathcal{U}^2 \le 2\mathcal{D}$
Fully Implicit	Upstream	$[1 + (2\mathcal{D} + \mathcal{U})(1 - \cos\sigma_n\Delta x) + i\mathcal{U}\sin\sigma_n\Delta x]^{-1}$	Unconditional
Fully Implicit	Central	$[1 + 2\mathcal{D}(1 - \cos\sigma_n\Delta x) + i\mathcal{U}\sin\sigma_n\Delta x]^{-1}$	Unconditional
Crank-Nicolson	Upstream	$\dfrac{1 - (\mathcal{D} + \frac{\mathcal{U}}{2})(1 - \cos\sigma_n\Delta x) - i\frac{\mathcal{U}}{2}\sin\sigma_n\Delta x}{1 + (\mathcal{D} + \frac{\mathcal{U}}{2})(1 - \cos\sigma_n\Delta x) + i\frac{\mathcal{U}}{2}\sin\sigma_n\Delta x}$	Unconditional
Crank-Nicolson	Central	$\dfrac{1 - \mathcal{D}(1 - \cos\sigma_n\Delta x) - i\frac{\mathcal{U}}{2}\sin\sigma_n\Delta x}{1 + \mathcal{D}(1 - \cos\sigma_n\Delta x) + i\frac{\mathcal{U}}{2}\sin\sigma_n\Delta x}$	Unconditional

NOTE: $\mathcal{D} = D\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$ $\quad \mathcal{U} = u\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$

193

APUNTES DE CURSO "GROUNDWATER MODELLING",
PROF. A. VALOCCHI, U. ILLINOIS AT URBANA-CHAMPAIGN