Diferencias Finitas (2)

Yarko Niño C. y Paulo Herrera R.

Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile

Semestre Primavera 2011

Resumen clase pasada

Diferencias Finitas $\equiv$ Representar derivadas como expresiones finitas basadas en los valores de las variables dependientes en los nodos de la grilla.

Derivada	Aproximación	Error
$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_i$	$\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta}$	$O(\Delta)$
	$\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta}$	$O(\Delta)$
	$\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta}$	$O\left(\Delta^2\right)$
$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_i$	$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta^2}$	$O(\Delta^2)$
	$\frac{-u_{i+2}+16u_{i+1}-30u_i+16ui-1-u_{i-2}}{12\Delta^2}$	$O(\Delta^4)$
$\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\|_i$	$\frac{u_{i+2}-2u_{i+1}+2u_{i-1}-u_{i-2}}{2\Delta^3}$	$O(\Delta^2)$

Ejemplo: Flujo en un acuífero confinado 1D

Ecuación que describe la distribuciíon de carga hidráulica en un acuífero confinado es,

$$T\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = S\frac{\partial h}{\partial t} \qquad \text{o} \qquad D\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

con condiciones iniciales y de borde,

$$h(x, t = 0) = H_{inicial}(x), \quad h(x = 0, t) = H_0(t), \quad h(x = L, t) = H_L(t)$$

Ejemplo: Flujo en un acuífero confinado 1D (cont.)

$$T\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = S\frac{\partial h}{\partial t} \qquad \text{o} \qquad D\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

Aproximación central para derivada espacial y explícita para temporal,

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} = \frac{D}{\Delta^2}\left[h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n\right]$$

Aproximación central para derivada espacial e implícita para temporal,

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} = \frac{D}{\Delta^2}\left[h_{i+1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}\right]$$

Ejemplo: Flujo en un acuífero confinado 1D (cont.)

Definiendo $\mathcal{D} \equiv D\Delta t/\Delta^2$, las dos últimas expresiones se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} h_i^{n+1} &= h_i^n + \mathcal{D}\left(h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n\right) \qquad \textbf{Explícita} \\ &= \left(1 - 2\mathcal{D}\right) h_i^n + \mathcal{D}h_{i+1}^n + \mathcal{D}h_{i-1}^n \end{aligned}$$

o en forma más compacta, $\mathbf{h}^{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{h}^n$.

$$\begin{aligned} h_i^n &= h_i^{n+1} - \mathcal{D}\left(h_{i+1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}\right) \qquad \textbf{Implícita} \\ &= \left(1 + 2\mathcal{D}\right) h_i^{n+1} - \mathcal{D}h_{i+1}^{n+1} - \mathcal{D}h_{i-1}^{n+1} \end{aligned}$$

o en forma más compacta, $\mathbf{h}^n = \mathbf{A}\mathbf{h}^{n+1}$.

Ejemplo: Flujo en un acuífero confinado 1D (cont.)

Qué pasa con las condiciones de borde?

$$h_0^n = H_0^n \qquad h_N^n = H_L^n$$

Se pueden agregar como un vector adicional para obtener,

$$\tilde{\mathbf{h}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{h}}^n + \mathbf{b}^n \qquad \textbf{Explícita}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{h}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{h}}^n + \mathbf{b}^n \qquad \textbf{Implícita}$$

NOTA: También es posible evaluar las condiciones de borde en **nodos fantasma** (*ghost nodes*), $h_{-1}^n = H_0$ y $h_{N+1}^n = H_L$. En la práctiva eso resulta en la utilización de una grilla de N nodos en vez de los $N-2$ nodos que resultan en el caso de evaluar en el primero y último nodo de la grilla.

Error de truncación

Debemos considerar los errores de truncación debido a las dos aproximaciones: temporal y espacial.
Por ejemplo, considerando la ecuación de difusión $\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ tenemos varias posibilidades para aproximarla:

1. Explícita

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} = \frac{D}{\Delta^2}\left[h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n\right] + O\left(\Delta t, (\Delta x)^2\right)$$

2. Implícita

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} = \frac{D}{\Delta^2}\left[h_{i+1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}\right] + O\left(\Delta t, (\Delta x)^2\right)$$

3. Crank-Nicolson

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} = \frac{D}{2\Delta^2}\left(\left[h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n\right] + \left[h_{i+1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}\right]\right) + O\left((\Delta t)^2, (\Delta x)^2\right)$$

Condiciones de borde

Dada la ecuación diferencial a derivadas parciales (EDP) de orden m:

$$F(u, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m})$$

Puede estar sujeta a condiciones de borde de distinto tipo:

- **Dirichlet**: $u(x) = g(x)$ en Ω, donde Ω es la superficie del dominio.
- **Neumann**: $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = g(x)$, donde $\mathbf{n}$ es la normal a la superficie Ω.
- **Robin**: $a_1 u(x) + a_2 \frac{\partial u}{\partial n} = g(x)$ en Ω, donde $a_1 = a_1(x)$ y $a_2 = a_2(x)$.

Condiciones de borde (cont.)

Cómo incorporamos los otros tipos de condiciones de borde?
En realidad **solo necesitamos saber como incorporar condiciones de tipo Robin**, las otras dos son casos particulares.

$$a_1 u(x) + a_2 \frac{\partial u}{\partial x} = g(x)$$

Usando una aproximacion de primer orden hacia adelante,

$$a_1 u_0 + a_2 \frac{u_1 - u_0}{\Delta} = g_0$$

reordenando,

$$u_0 = \left(g_0 - \frac{a_2 u_1}{\Delta} \right) \frac{\Delta}{a_1 \Delta - a_2}$$

Ahora podemos sustituir esta expresión en la fila correspondiente a u_1
$\Rightarrow$ esto genera cambios en la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ y el vector $\mathbf{b}$.