# ASPECTOS GENERALES DE LAS SERIES DE FOURIER

**CI71D Modelación Numérica en Ingeniería Hidráulica y Ambiental**
Profs. C. Espinoza y Y. Niño
Semestre Primavera 2001

## 1. SERIES DE FOURIER

### 1.1 Aspectos Generales

Supongamos una función $f(x)$ que es periódica sobre el intervalo $(-\pi,\pi)$, la representación como una serie de Fourier de la función $f(x)$ es:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos(n\cdot x)+b_n\cdot\operatorname{sen}(n\cdot x)\right) \tag{1}$$

con:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(n\cdot x)\,dx \qquad \text{con n=0, 1, 2, ...} \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}(n\cdot x)\,dx \qquad \text{con n= 1, 2, ...} \tag{3}$$

Las condiciones sobre $f(x)$ para las cuales las series anteriores existen son bastante generales. Específicamente, se requiere que $f(x)$ sea continua por partes dentro del intervalo $(-\pi,\pi)$; esto es que el intervalo pueda ser subdividido en un número finito de subintervalos, dentro de cada uno de los cuales $f(x)$ sea continua y tenga límites finitos hacia la izquierda y derecha de cada intervalo. Adicionalmente $f(x)$ debe ser suave por tramos, esto es $f(x)$ debe tener derivadas de primer y segundo grado continuas.

Bajo las condiciones anteriores, la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos(n\cdot x)+b_n\cdot\operatorname{sen}(n\cdot x)\right)$$

- converge a $f(x)$, en cualquier punto donde $f(x)$ sea continua dentro del intervalo $(-\pi,\pi)$,
- converge a

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\lim_{x\to x_i^+}f(x)+\lim_{x\to x_i^-}f(x)\right]$$

en cada punto de discontinuidad $x_i$ dentro del intervalo $(-\pi,\pi)$, y,

- converge a

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\lim_{x\to\pi^+} f(x)+\lim_{x\to\pi^-} f(x)\right]$$

en $\pm\pi$.

## 1.2 Ejemplo

a) Consideremos la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x<0\\ +1 & 0\le x<\pi\end{cases}$$

Según la definición de $a_n$ y $b_n$ se tiene:

$$a_n=-\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}\cos(n\cdot x)dx+\frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi}\cos(n\cdot x)dx=0 \qquad para \quad n=0,1,2,\dots$$

$$b_n=-\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}\mathrm{sen}(n\cdot x)dx+\frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi}\mathrm{sen}(n\cdot x)dx=\begin{cases}0 & n=2,4,6,...\\ 4/n\cdot\pi & n=1,3,5,...\end{cases}$$

De tal forma que la serie de Fourier que representa a $f(x)$ es:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\cdot\mathrm{sen}(x)+\frac{4}{3\cdot\pi}\cdot\mathrm{sen}(3\cdot x)+\ldots=\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}([2\cdot n-1]\cdot x)}{2\cdot n-1}$$

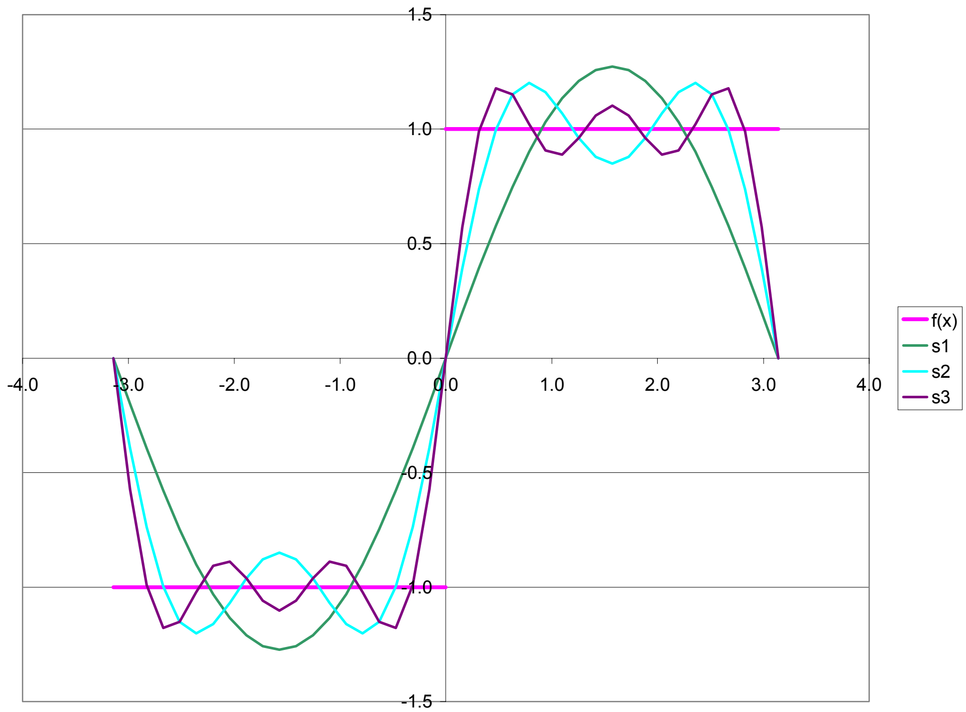
La Figura 1 muestra la función $f(x)$ y las tres primeras series parciales:

$$s_1=\frac{4}{\pi}\cdot\mathrm{sen}(x) \qquad s_2=s_1+\frac{4}{3\cdot\pi}\cdot\mathrm{sen}(3\cdot x) \qquad s_3=s_2+\frac{4}{5\cdot\pi}\cdot\mathrm{sen}(5\cdot x)$$

b) Demostrar que $f_1(x)$ es la expansión en series de Fourier de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+x & -\pi\le x<0\\ \frac{\pi}{2}-x & 0\le x<\pi\end{cases} \qquad f_1(x)\approx\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos([2\cdot n-1]\cdot x)}{(2\cdot n-1)^2}$$

**Figura 1**
**Representación de una Onda Rectangular Mediante Series de Fourier**




## 2. FORMA COMPLEJA DE LAS SERIES DE FOURIER

Las siguientes identidades trigonométricas:

$$e^{I\cdot\beta} = \cos(\beta) + I\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\cos(\beta) = \frac{e^{I\cdot\beta} + e^{-I\cdot\beta}}{2} \qquad \operatorname{sen}(\beta) = \frac{e^{I\cdot\beta} - e^{-I\cdot\beta}}{2\cdot I}$$

pueden ser usadas para reescribir las series de Fourier como:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{I\cdot n\cdot x}$$

$$C_n = \frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cdot e^{-I\cdot n\cdot x}\, dx \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

donde:

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \quad , \quad C_n = \frac{a_n - I\cdot b_n}{2} \quad , \quad C_{-n} = \frac{a_n + I\cdot b_n}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

## 3. SERIES DE FOURIER DISCRETAS

Supongamos que el intervalo $(-\pi,\pi)$ se divide en N intervalos igualmente espaciados, con separación. $\Delta x = \dfrac{2\cdot\pi}{N-1}$ Los puntos sobre una grilla se ubican en las siguientes posiciones:

$$x_j = \frac{2\cdot j - N + 1}{N-1}\cdot\pi$$

Si consideramos una función $f(x)$, su aproximación mediante una serie de Fourier discreta se puede escribir como:

$$f(x) \approx f_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \cdot e^{I\cdot n\cdot x}$$

$$C_n = \frac{1}{N}\cdot\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\cdot e^{-I\cdot n\cdot x_j}$$

## 4. CORRECCIONES A UNA SERIE DE FOURIER

### 4.1 Cambio de Intervalo

Si $f(x)$ es una función de período $2\cdot\pi$, cualquier intervalo de longitud $2\cdot\pi$ puede ser usado como el intervalo básico en las ecuaciones (2) y (3). Por ejemplo la ecuación (2) puede ser escrita como:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_C^{C+2\cdot\pi} f(x)\cos(n\cdot x)\,dx$$

### 4.2 Cambio de período

Si $f(x)$ tiene un período *p*, tal que $f(x+p) = f(x)$ entonces, la sustitución $x = \dfrac{p}{2\cdot\pi}\cdot y$ transforma la función $f(x)$ en una función:

$$g(y) = f\left(\frac{p}{2\cdot\pi}\cdot y\right)$$

y $g(y)$ tiene un período $2\cdot\pi$ .

### 4.3 Ejemplo

Consideremos la siguiente función $f(x) = 2\cdot x + 1$, y representemos $f(x)$ como una serie de Fourier sobre el intervalo $0 \le x \le 2$ .

En este caso el período *p* =2, y por lo tanto $x = \frac{y}{\pi}$, de tal forma que:

$$g(y) = f\left(\frac{y}{\pi}\right) = \frac{2 \cdot y}{\pi} + 1$$

donde $g(y)$ tiene un período $2 \cdot \pi$ y está definida en el intervalo $0 \leq y \leq 2 \cdot \pi$. A partir de la ecuación (1) podemos escribir:

$$g(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(n \cdot y) + b_n \cdot \operatorname{sen}(n \cdot y)\right)$$

Según la definición de $a_n$ y $b_n$ se tiene:

$$a_n = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \left(\frac{2 \cdot y}{\pi} + 1\right) \cdot \cos(n \cdot y) dy \qquad para \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \left(\frac{2 \cdot y}{\pi} + 1\right) \cdot \operatorname{sen}(n \cdot y) dy \qquad para \quad n = 1,2,\ldots$$

Las integraciones anteriores permiten obtener:

$$a_0 = 6, \qquad a_1 = a_2 = \ldots = 0 \qquad b_n = -\frac{4}{n \cdot \pi}$$

De tal forma que la serie de Fourier que representa a $f(x)$ es:

$$g(y) = 3 - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n \cdot y)}{n}$$

o

$$f(x) = g(\pi \cdot x) \approx 3 - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n \cdot \pi \cdot x)}{n}$$

La Figura 2 muestra la función $f(x)$ y las tres primeras series parciales, mientras que la Figura 3 muestra la función $f(x)$ y las series parciales de 10, 20 y 30 términos.

$$s_1 = 3 - \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{sen}(\pi \cdot x) \qquad s_2 = s_1 - \frac{4}{2 \cdot \pi} \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \pi \cdot x) \qquad s_3 = s_2 - \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot \operatorname{sen}(3 \cdot \pi \cdot x)$$

**Figura 2**
**Representación de la Función $f(x) = 2 \cdot x + 1$ mediante Series de Fourier**

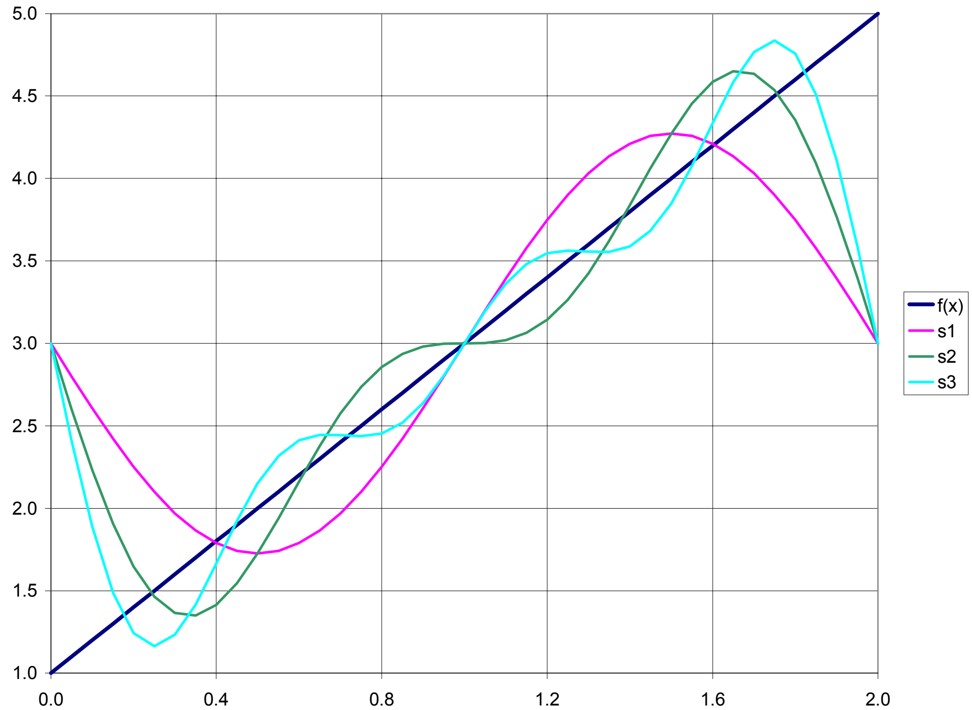



**Figura 3**
**Representación de la Función $f(x) = 2 \cdot x + 1$ mediante Series de Fourier**