SERIES DE FOURIER

FD704 METODOS EXPERIMENTALES EN FLUIDODINAMICA
Prof. Y. Niño — Sem. Otoño 2004

1 Series de Fourier

Una función $f(x)$ definida en el intervalo $c \leq x \leq c + 2L$ (Fig. 1), se puede aproximar por la siguiente serie, llamada serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})\}$$

donde:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos(\frac{\pi n x}{L}) \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \sin(\frac{\pi n x}{L}) \, dx$$

Es decir, la función $f(x)$ puede aproximarse por una suma de senos y cosenos de distinta longitud de onda.

Ejemplo: Considere la función (Fig. 2)

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ ; & -\pi < x < 0 \\ 1 \ ; & 0 < x < \pi \end{cases}$$

En este caso se tiene: $c = -\pi$ y $L = \pi$. Con ello se obtiene:

$$a_0 = 1 \ ; \ a_n = 0$$

$$b_n = \begin{cases} 0 \ ; & n \text{ par} \\ \frac{2}{n\pi} \ ; & n \text{ impar} \end{cases}$$

y por lo tanto:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)x)$$

En base a este resultado definamos:

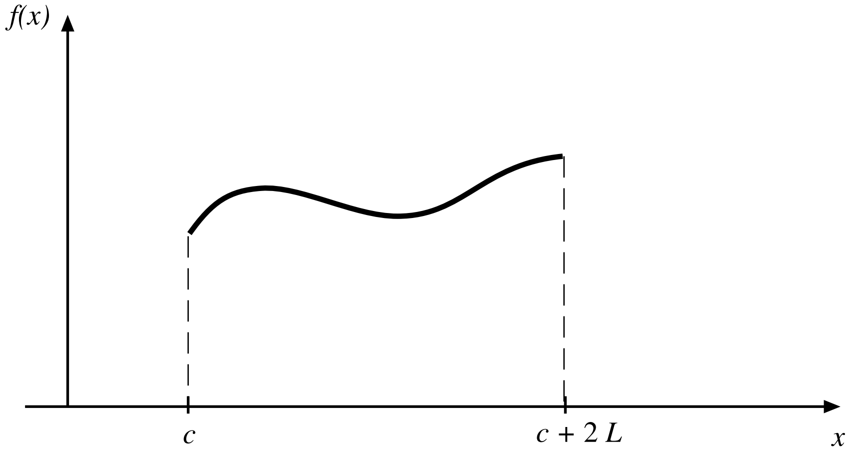

Figura 1: Función $f(x)$ definida en el intervalo $c \leq x \leq c + 2L$.

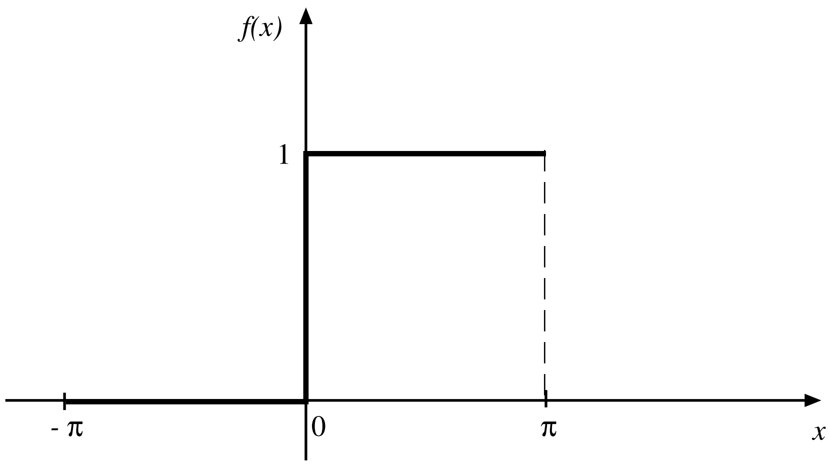

Figura 2: Función $f(x)$ definida en el rango $-\pi \leq x \leq \pi$.

$$S_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)x)$$

Puede demostrarse que $S_N(x)$ se aproxima sucesivamente a $f(x)$ a medida que N aumenta, tal como se aprecia en la Fig. 3. En el caso práctico, en general, se utiliza S_N como la aproximación de la serie de Fourier, y por lo tanto como aproximación de la función original $f(x)$, con un valor de N suficientemente alto.

De este ejemplo se deduce que para representar adecuadamente variaciones bruscas de $f(x)$ se requieren muchos términos de la serie. Es decir, se requieren ondas con longitud suficientemente pequeña.

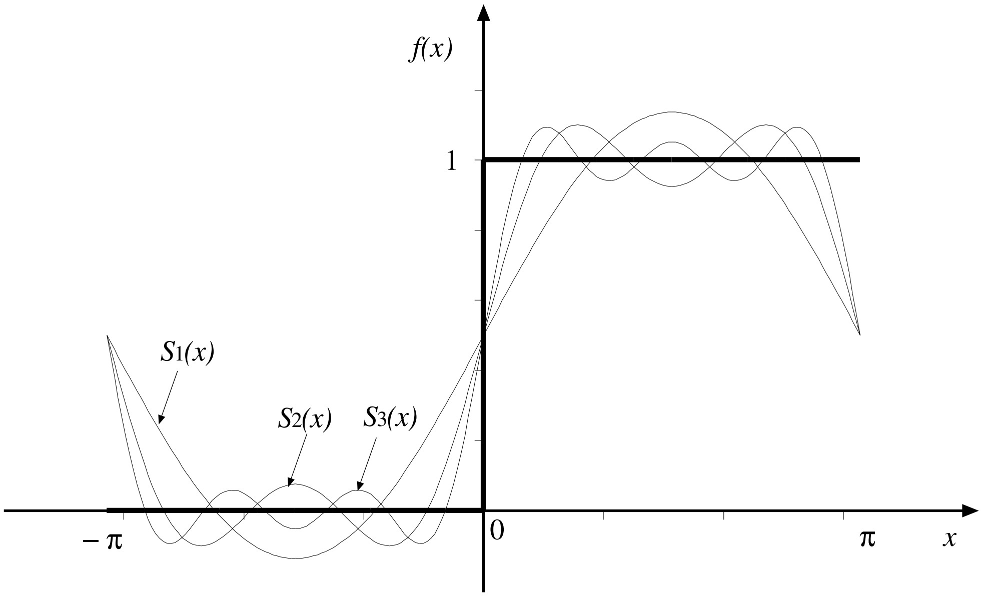

Figura 3: Aproximación de la función $f(x)$ mediante series de Fourier.

2 Forma Compleja de las Series de Fourier

Recordando que la identidad de Euler permite escribir:

$$\exp(i\ \alpha) = \cos(\alpha) + i\ \sin(\alpha)$$

con $i = \sqrt{-1}$, entonces la serie de Fourier se puede escribir en la forma siguiente:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\ \exp(i\ \frac{n\pi x}{L})$$

donde:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_c^{c+2L} f(x)\ \exp(-i\ \frac{n\pi x}{L})\ dx$$

Es fácil ver que:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\ (a_n - i\ b_n) & ;\ \ n > 0 \\ \frac{1}{2}\ (a_{-n} + i\ b_{-n}) & ;\ \ n < 0 \\ \frac{1}{2}\ a_0 & ;\ \ n = 0 \end{cases}$$

3 Transformada de Fourier

Es una forma continua de la Serie de Fourier, definida como:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \exp(-i\ \alpha\ x)\ dx$$

La transformada inversa está dada por:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\ \exp(i\ \alpha\ x)\ d\alpha$$

Ejemplo: Transformada de Fourier de una onda sinusoidal de longitud L

$$f(x) = \exp(i\ \frac{2\pi x}{L}) = \cos(\frac{2\pi x}{L}) + i\ \sin(\frac{2\pi x}{L})$$

La transformada de esta función está dada por:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\ \frac{2\pi x}{L})\ \exp(-i\ \alpha\ x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\ (\alpha - \frac{2\pi}{L})\ x)\ dx$$

de modo que:

$$F(\alpha) = -\left. \frac{\exp(-i\ (\alpha - \frac{2\pi}{L})\ x)}{i\ (\alpha - \frac{2\pi}{L})} \right|_{-\infty}^{\infty}$$

Para visualizar mejor el resultado anterior es conveniente reescribirlo como:

$$F(\alpha) = -\lim_{X\to\infty} \left. \frac{\exp(-i\ (\alpha - \frac{2\pi}{L})\ x)}{i\ (\alpha - \frac{2\pi}{L})} \right|_{-X}^{X}$$

de donde, usando la identidad de Euler, se obtiene:

$$F(\alpha) = \lim_{X\to\infty} 2X\ \frac{\sin((\alpha - \frac{2\pi}{L})\ X)}{(\alpha - \frac{2\pi}{L})\ X} = \lim_{X\to\infty}\ 2X\ \frac{\sin((\alpha - \alpha_0)\ X)}{(\alpha - \alpha_0)\ X}$$

donde se ha definido como $\alpha_0 = 2\pi/L$, al número de onda de la onda sinusoidal.

Ahora, considerando la función:

$$G(\alpha) = \frac{\sin((\alpha - \alpha_0)\ X)}{(\alpha - \alpha_0)\ X}$$

entonces se tiene:

$$F(\alpha) = \lim_{X\to\infty}\ 2X\ G(\alpha)$$

La función $G(\alpha)$ se grafica en la Fig. 4, donde se aprecia que ella tiene un máximo en $\alpha = \alpha_0$ y oscila en torno a cero para valores de α mayores y menores que este último valor. En base a este resultado puede demostrarse que $F(\alpha)$ tiene un comportamiento similar, sin embargo al hacer $X \to \infty$ entonces esta función tiende a ser nula para todo $\alpha \neq \alpha_0$ y tiende a ∞ para $\alpha = \alpha_0$, tal como se esquematiza en la Fig. 5. Se sugiere verificar este resultado graficando la función $X\ G(\alpha)$ para valores cada vez mayores de X.

Este resultado muestra que la transformada de Fourier de una onda sinusoidal con número de onda α_0 está definida solo para $\alpha = \alpha_0$. Considerando una función cualquiera $f(x)$, que puede expresarse en términos de su expansión en series de Fourier como:

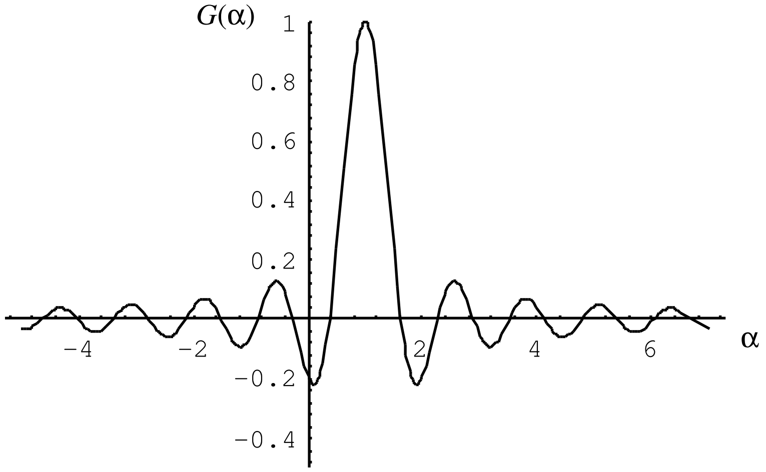

Figura 4: Función $G(\alpha)$ en el espacio de números de onda, correspondiente a $\alpha_0 = 1$ y $X = 5$.

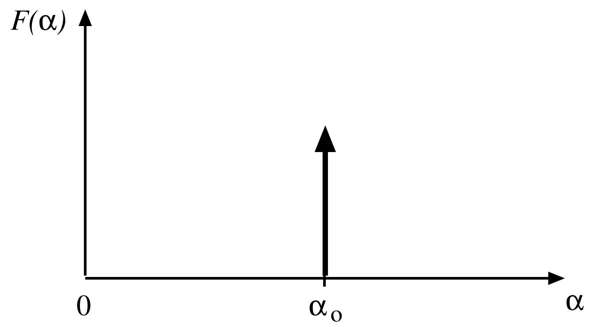

Figura 5: Esquema representando la transformada de Fourier de una onda sinusoidal de número de onda α_0.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i \, \frac{n 2\pi x}{L}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i \; n \; \alpha_0 \; x)$$

entonces su transformada de Fourier puede expresarse como una suma de funciones definidas solo en los números de onda $n\alpha_0$, con n en el intervalo $(-\infty, \infty)$, tal como se muestra en la Fig. 6.

Si el máximo de $F(\alpha)$ ocurre para un número de onda $\alpha = k \; \alpha_0$, entonces la onda sinusoidal con este número de onda es la que contribuye más, en términos relativos, en la aproximación para $f(x)$.

Volviendo al resultado de la transformada de Fourier de la onda sinusoidal, es posible definir:

$$F(\alpha) = \lim_{X \to \infty} \; 2X \; \frac{\sin((\alpha - \alpha_0) \; X)}{(\alpha - \alpha_0) \; X} = 2\pi \; \delta(\alpha - \alpha_0)$$

donde $\delta(\alpha)$ es la denominada *función delta*, la que pertenece a una clase de funciones generalizadas y que cumple con las siguientes propiedades:

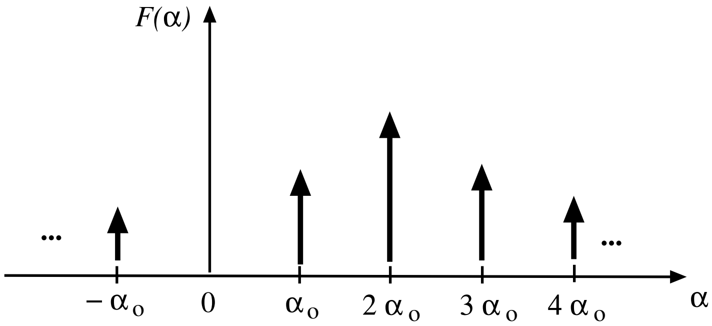

Figura 6: Esquema representando la transformada de Fourier de una función $f(x)$ expresada mediante una serie de Fourier.

- $\delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\ \alpha\ x)\ dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha)\ d\alpha = 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)\ \delta(\alpha - \alpha_0)\ d\alpha = g(\alpha_0)$

Es decir $\delta(\alpha - \alpha_0)$ es nula en todo el dominio excepto en α_0, donde se hace infinita, sin embargo su integral sobre el dominio es finita y toma el valor unitario. De este modo, es posible expresar la transformada de Fourier de la onda sinusoidal $f(x) = \exp(i\ \alpha_0\ x)$ como $F(\alpha) = 2\pi\ \delta(\alpha - \alpha_0)$.