ECUACIONES DIFERENCIALES

CI71D MODELACION NUMERICA EN INGENIERIA HIDRAULICA Y AMBIENTAL
Prof. Y. Niño Sem. Primavera 2003

1 Clasificación Matemática

Consideremos una variable dependiente u que depende de un número de variables independientes x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Expresado en términos de una relación funcional, es posible escribir:

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

La relación funcional anterior es analítica si admite una expansión en serie de Taylor en todas sus variables independientes. Esto es equivalente a decir que u tiene derivadas de cualquier orden en cualquiera de las n variables. En este caso, una ecuación diferencial a derivadas parciales (EDP) es cualquier relación entre las derivadas de u. La forma general para u escalar es:

$$F(u, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}, \ldots) = 0$$

El orden de una ecuación diferencial está dado por el orden de la derivada mayor presente en ella. En el caso general anterior, la ecuación diferencial es de orden m.

La EDP es *lineal* si la función F es una combinación lineal de varias de las derivadas de u. Los coeficientes de la combinación lineal pueden ser constantes o bien funciones de las variables independientes x_i. La EDP es *cuasi-lineal* si F es lineal en las derivadas de mayor orden, mientras que los coeficientes de la combinación lineal pueden depender de las derivadas de menor orden así como también de las variables independientes. Si la ecuación no es ni lineal ni cuasi-lineal, entonces es *no-lineal*. La capacidad actual de resolver analíticamente EDPs se limita prácticamente al caso lineal con coeficientes constantes. Cualquier otra clase de EDP es significativamente más difícil de resolver.

Consideremos ahora una ecuación general a derivadas parciales en dos variables independientes, x e y, lineal, de segundo orden, con coeficientes variables:

$$a \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \, \frac{\partial u}{\partial x} + e \, \frac{\partial u}{\partial y} + f \, u = g(x, y)$$

donde a, b, c, d, e y f son funciones de (x, y).

Es posible definir ciertas formas canónicas para distintas clases de EDPs. Hay tres tipos de EDP representadas por la forma general anterior: ecuaciones *elípticas*, *parabólicas* e *hiperbólicas*. La clasificación se realiza en términos del *discriminante*: $D = b^2 - 4 \, a \, c$.

Se dice que una ecuación es elíptica si $D < 0$. En ese caso la forma canónica de la ecuación es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = h_1(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta)$$

La ecuación es parabólica si $D = 0$ y su forma canónica es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = h_2(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta)$$

La ecuación es hiperbólica si $D > 0$ y su forma canónica es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = h_3(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta)$$

Una forma alternativa de esta última ecuación es la denominada forma en *coordenadas características*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = h_4(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta)$$

En este análisis se ha aplicado una transformación de coordenadas: $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$. Es importante que esta transformación sea *no singular*, es decir, que el Jacobiano de la transformación:

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

sea distinto de cero. Puede demostrarse que una transformación no singular no cambia el tipo de la EDP.

En efecto, con esta transformación es posible obtener la siguiente ecuación diferencial:

$$A\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + B\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \ldots = g(\xi, \eta)$$

donde:

$$A = a\,(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 + b\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\,(\frac{\partial \xi}{\partial y})^2$$

$$B = 2a\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} + b\,\frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + 2c\,\frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$C = a\,(\frac{\partial \eta}{\partial x})^2 + b\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\,(\frac{\partial \eta}{\partial y})^2$$

de donde se concluye que el discriminante de la ecuación transformada es:

$$B^2 - 4\,A\,C = (b^2 - 4\,a\,c)\,J^2$$

y el signo de este discriminante es idéntico al signo del discriminante de la ecuación original, D.

2 EDP hiperbólica

Para obtener la forma en coordenadas características se debe especificar (ξ, η) como raíces de las ecuaciones $A = 0$ y $C = 0$, respectivamente. Es fácil demostrar que con estas ecuaciones, las superficies $\xi(x, y) = constante$ y $\eta(x, y) = constante$ están dadas por la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

Las soluciones para ξ y η se denominan las *características* de la EDP. Las variables ξ y η se denominan las *coordenadas características* de la EDP.

Consideremos la ecuación de segundo orden siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

en el intervalo $-\infty < x < +\infty$, con condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

Esta ecuación es conocida como la *ecuación de onda*. Su solución se obtiene fácilmente con las transformaciones a las coordenadas características: $\xi = x + c\,t$ y $\eta = x - c\,t$. Es fácil demostrar que en estas coordenadas la ecuación de onda se reduce a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

de donde se obtiene la solución:

$$u(x, t) = F_1(x + c\,t) + F_2(x - c\,t)$$

la cual es denominada como la *solución de D'Alambert*. Las formas particulares de las funciones F_1 y F_2 vienen dadas por las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = c\,F_1'(x) - c\,F_2'(x)$$

donde la prima denota derivada de la función respectiva.

Con estas condiciones, la solución de la EDP es:

$$u(x, t) = \frac{f(x + c\,t) + f(x - c\,t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-c\,t}^{x+c\,t} g(\tau)\,d\tau$$

Una propiedad distintiva de las EDP hiperbólicas puede ser deducida a partir de esta última solución y de la geometría del dominio físico de interés. La Fig. 1 muestra las características que pasan por el punto (x_0, t_0). Se denomina *característica positiva* a la de pendiente $+1/c$ y

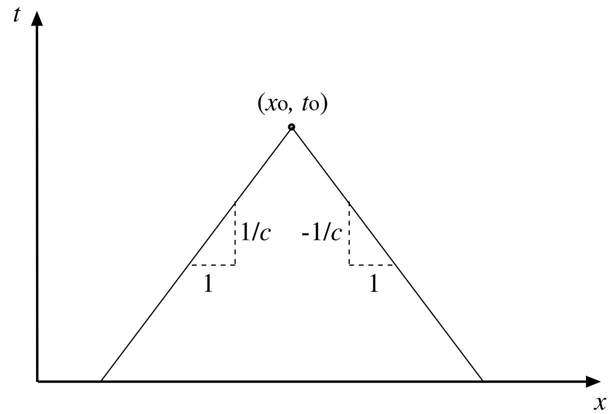

Figura 1: Características para la ecuación de onda.

característica negativa a la de pendiente $-1/c$. La solución $u(x,t)$ en (x_0,t_0) depende solo de los datos iniciales contenidos en el intervalo: $x_0 - c\, t_0 \leq x \leq x_0 + c\, t_0$. Esta es la propiedad fundamental de las EDP hiperbólicas: su limitado dominio de dependencia. Este dominio queda limitado por las características que pasan por el punto (x_0,t_0). Claramente la solución $u(x_0,t_0)$ nunca podrá ser influída por información que ocurra afuera de dicho dominio de dependencia.

Los problemas asociados a las EDP hiperbólicas usualmente se denominan *problemas de valor inicial*. En el ejemplo anterior no es necesario aplicar ninguna condición de borde para algún valor $x = constante$; la solución en (x_0,t_0) depende solo de las condiciones iniciales.

3 EDP parabólica

Las EDP parabólicas se caracterizan por tener un discriminante $D = b^2 - 4\ a\ c = 0$. Con esta condición es fácil demostrar que la ecuación diferencial característica asociada está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a}$$

la cual tiene solo una solución, lo cual indica que existe solo una característica en este problema.

Las EDP parabólicas están asociadas con procesos físicos de difusión. Sin embargo, mientras estas ecuaciones también presentan una evolución de la solución en el tiempo, ellas no exhiben el limitado dominio de dependencia típico de las ecuaciones hiperbólicas. Por el contrario, la solución de una ecuación parabólica en un tiempo t_0 depende de todo el dominio físico en el tiempo $t < t_0$, incluyendo condiciones de borde en posiciones x específicas.

Consideremos la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Esta EDP representa una típica ecuación de difusión. Podemos considerar el problema de la aceleración impulsiva de una placa plana en un fluido incompresible de viscosidad cinemática ν, donde u representa la velocidad del fluido en la dirección x paralela a la placa, t denota el tiempo e y denota la distancia perpendicular a la placa. Este es el conocido problema de Rayleigh, el cual tiene solución analítica. Las condiciones iniciales y de borde son las siguientes:

$$u(0, y) = 0$$

$$u(t, 0) = U \quad ; \quad t > 0$$

$$u(t, \infty) = 0$$

La forma de resolver esta ecuación es buscando soluciones autosimilares. Esto implica convertir la EDP en (y, t) a una ecuación diferencial ordinaria en una nueva variable independiente η. Por ejemplo, eligiendo:

$$f(\eta) = \frac{u}{U}$$

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu\, t}}$$

se obtiene la siguiente EDO:

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\,\eta\,\frac{df}{d\eta} = 0$$

con condiciones de borde:

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f(\infty) = 0$$

La solución de la EDO es:

$$u = U\,(1 - erf(\eta))$$

donde la *función error* se define como:

$$erf(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp\left(-\eta^2\right) d\eta$$

Esta solución muestra que la capa de fluido que es puesto en movimiento por acción de la placa aumenta en el tiempo y que la tasa de crecimiento de dicha capa depende de la viscosidad ν. La cantidad de movimiento de la placa es difundida verticalmente hacia el fluido desde la placa por la acción de la viscosidad. Este proceso de difusión es similar a la conducción molecular de calor en un fluido.

4 EDP elíptica

Una EDP es elíptica si el discriminante $D = b^2 - 4\,a\,c < 0$. En este caso la ecuación diferencial característica no tiene raíces reales. En efecto, las características están dadas por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\,\sqrt{4\,a\,c - b^2}}{2\,a}$$

y por lo tanto ambas son complejas. Eso significa que las EDP elípticas no representan problemas que evolucionan en el tiempo. Al contrario, ellas representan problemas permanentes con condiciones de borde espaciales, las que determinan el comportamiento de la solución al interior del dominio de solución.

Un típico ejemplo de EDP elíptica es la ecuación de Laplace en el disco unitario:

$$\nabla^2 u = 0 \quad ; \quad 0 \leq r < 1 \quad ; \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

sujeta a las condiciones de borde:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) = f(\theta) \quad ; \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

La solución de este problema se puede lograr utilizando la técnica de separación de variables, lo cual permite obtener un sistema de EDOs, las cuales pueden resolverse fcilmente. Este método es también conocido como método de Fourier o de expansión en funciones propias. Es fácil demostrar que para el presente problema se obtiene una solución de la forma:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \ \cos(n\ \theta) + b_n \ \sin(n\ \theta)\right)$$

Expresiones para a_n y b_n se obtienen a partir de las condiciones de borde en todo el dominio correspondiente del disco unitario. Es importante mencionar que en este tipo de problemas existe solución solo si la condición de borde cumple con la condición:

$$\int f(\theta)\ dl = 0$$

en el contorno del disco unitario. Esta condición está relacionada con un problema de continuidad global de la variable u. Por ejemplo, si u representa temperatura, esta última condición indica que el flujo de calor neto hacia el disco unitario debe ser nulo para que exista una distribución estacionaria de temperatura en el dominio de análisis. Las funciones u que satisfacen la ecuación de Laplace se denominan *funciones armónicas*.

5 Problema "bien puesto"

Un problema se considera *bien puesto* si satisface las siguientes tres condiciones: existencia, unicidad y dependencia continua en las condiciones iniciales y de borde. La existencia se demuestra usualmente encontrando una solución que satisfaga la EDP y las condiciones iniciales y/o de borde. La unicidad implica que la solución encontrada es la única solución posible para el problema considerado. La dependencia continua de los datos iniciales y de borde es una propiedad que resulta de observaciones de sistemas físicos. Esta condición implica que pequeñas perturbaciones o errores en las condiciones iniciales o de borde resultan en pequeñas variaciones de la solución de la EDP.

Consideremos ahora la siguiente ecuación, conocida como la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 u = f(x)$$

definida sobre un dominio Ω, donde x es un vector. Esta ecuación elíptica puede tener las siguientes condiciones de borde distintas:

- Dirichlet: $u(x) = g(x)$ en $\partial\Omega$
  donde $\partial\Omega$ denota la frontera de Ω, donde se aplica la condición de borde.
- Neumann: $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n = g(x)$ en $\partial\Omega$
  donde n denota el vector unitario normal $\partial\Omega$ en cualquier punto x de dicha frontera.
- Robin: $a_1\, u(x) + a_2\, \frac{\partial u}{\partial n} = g(x)$ en $\partial\Omega$
  donde los coeficientes a_1 y a_2 pueden ser funciones de x.

Condiciones de borde mixtas corresponden a casos donde en una parte de la frontera $\partial\Omega$ se impone un tipo de condición de borde y en otra parte se impone otro.

Finalmente, aunque estas condiciones han sido definidas para la ecuación de Poisson, ellas se utilizan también en relación con cualquier otro tipo de EDP.

6 Otras EDPs de interés

- Ecuación de onda de primer orden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

  Esta ecuación gobierna la propagación de una onda con velocidad constante c. Se denomina también *ecuación de advección*.

- Ecuación inviscida de Burger:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

  Esta ecuación se denomina también la ecuación de onda no lineal de primer orden. Gobierna la propagación de ondas no lineales en el caso unidimensional.

- Ecuación de Burger:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

  Esta ecuación es similar a la anterior pero incluye difusión. Esta forma particular es muy similar a las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido y pueden ser usadas como un modelo no lineal simple para experimentos numéricos.

- Ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

  Esta ecuación gobierna la distribución de temperatura en un fluido o un sólido, con fuentes de calor descritas por la función f

- Ecuación de advección - difusión:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u\,\frac{\partial \xi}{\partial x} = \alpha\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Esta ecuación representa la advección de un escalar en un flujo con velocidad u, en conjunto con la difusión del mismo controlada por el coeficiente de difusión α.

- Ecuación de Korteweg - de Vries:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Esta ecuación gobierna el movimiento de ondas dispersivas no lineales.

- Ecuación de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2\,u = 0$$

Esta ecuación gobierna el movimiento de ondas armónicas, donde k es un parámetro de frecuencia. Se aplica para el análisis de ondas acústicas.

7 Referencias

- Anderson, Tannchill and Pletcher (1984). Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Hemisphere Publishing Corporation
- Carrier and Pearson (1988). Partial Differential Equations. Academic Press.
- Shawki (1992). Mathematical Methods for Engineers and Physicists. Part II: Partial Differential Equations. Lecture Notes. Department of Theoretical and Applied Mechanics. University of Illinois at Urbana-Champaign.