Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Yarko Niño C. y Paulo Herrera R.

Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile

Semestre Primavera 2011

Motivación

- Seguna Ley de Newton:

$$F = ma \Rightarrow x'' = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F}{m}$$

$x(t)$ dado $x(t=0) = x_0$?

- Trayectoria de una partícula:

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(t, x)$$

$x(t)$ dado $x(t=0) = x_0$?

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)

En general, queremos resolver problemas del tipo:

$$y^k = f(t, y', y'', \ldots, y^{k-1})$$

los cuales pueden ser reducidos a un sistema de EDOs de primer orden usando variables auxiliares $u_1, u_2, \ldots, u_k$; tal que

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ f(t, u_1, u_2, \ldots, u_k) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Entonces, problema se reduce a varios problemas de primer orden. con condición inicial $y(t_0) = y_0$.

EDP de primer orden

Podemos concentrarnos en la solución del problema:

$$y' = f(t, y)$$

sujeto a $y(t_0) = y_0$.

La solución queda determinada por la solución inicial $\Rightarrow$ *Problema de Valor Inicial.*

Ejemplo: $y' = y$ con $y(t = 0) = y_0$.
Solución: $y(t) = y_0 e^t$

Estabilidad

- **Solución estable**: solución de problema con condición inicial perturbada permanece cercana a solución de problema original.
- **Solución asintóticamente estable**: solución de problema perturbado converge a solución de problema original.
- **Inestable**: solución de problema perturbado diverge de solución de problema orignal.

Estabilidad (cont.)

EDP:

$$y' = \lambda y, \quad y(t=0) = y_0 \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

- $\lambda > 0$: soluciones crecen exponencialmente. Solución es inestable.
- $\lambda < 0$: soluciones decaen exponencialmente. Solución es asintóticamente estable.

Solución numérica

Estrategia:

1. Dividir intervalo $I \equiv [a, b]$ en un conjunto de puntos t_i, donde $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$.
2. Calcular valores $\hat{y}_i$ que aproximen la función $y(t)$ en los puntos t_i.

El método de solución debe satisfacer:

- La solución es **única**.
- La solución aproximada **converge** a la verdadera solución para $\Delta t_i \to 0$.
- La solución aproximada $\hat{y}_i$ puede ser **calculada** (# operaciones + propagación de errores).

Método de Euler

$$y' = f(t, y)$$

Serie de Taylor,

$$\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + \dots \\ &= y(t) + hf(t, y) + \frac{h^2}{2} y''(t) + \dots \end{aligned}$$

Despreciando términos de orden superior a h,

$$\hat{y}(t+h) \approx y(t) + hf(t, y)$$

En forma discreta,

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + h_k f(t_k, \hat{y}_k)$$

Ejemplo: Método de Euler

$$y' = y, \quad y(t=0) = y_0$$

La solución de este problema es $y(t) = y_0 e^t$.

Aplicando método de Euler,

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + h\hat{y}_k = (1+h)\hat{y}_k$$

Suponiendo, $y_0 = 1$ y $h = 0,5$:

$$\hat{y_1} = (1+h)y_0 = 1,5 \qquad \text{pero,} \qquad y(0,5) = 1,649$$

$$\hat{y_2} = (1+h)^2 y_0 = 2,25 \qquad \text{pero,} \qquad y(1,0) = 2,718$$

Tomando solución aproximada como condición inicial $y(t = 0,5) = 1,5$; entonces la solución exacta del problema es $y(t = 1) = 2,473$.

Errores

En cada paso solución aproximada salta a distinta solución.

Error global: diferencia entre solución aproximada $\hat{y}_k$ y verdadera solución $y(t_k)$.

$$e_k = \hat{y}_k - y(t_k)$$

Error local: error introducido en cada paso del algoritmo.

$$l_k = \hat{y}_k - y(t_k; \hat{y}_{k-1})$$

donde $y(; \hat{y}_{k-1})$ es la solución exacta del problema con condición inicial $y(t = t_{k_1}) = \hat{y}_{k-1}$.

Errores (cont.)

- Error global no es igual a la suma de errores locales,

$$e_k \neq \sum_{i=0}^{k} l_i$$

- En general,

$$e_k > \sum_{i=0}^{k} l_i$$

- Objetivo final es minimizar e_k, pero sólo podemos controlar l_k.
- Método es de orden p si,

$$l_k = O(h_k^{p+1})$$

- El error local por incremento h_k es,

$$l_k / h_k = O(h_k^{p})$$

Estabilidad método de Euler

Ecuación,

$$y' = \lambda y$$

Usando espaciamiento constante, $\Delta t = h$, obtenemos

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + h\lambda\hat{y}_k = (1 + h\lambda)\hat{y}_k$$

Equivalente a,

$$\hat{y}_k = (1 + h\lambda)^k \, y_0$$

Si $\lambda < 0$ (o $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$), entonces la verdadera solución decae a 0. Por otra parte, la solución numérica decae a 0 si,

$$|1 + \lambda h| < 1$$

Estabilidad método de Euler (cont.)

Método es estable si,

$$|1 + \lambda h| < 1$$

Si $\lambda < 0$, esta condición requiere que,

$$h \leq \frac{-2}{\lambda}$$

Factor de desarrollo (*growth factor*) es $1 + \lambda h$ y es igual al primer término de la serie,

$$e^{h\lambda} = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \ldots$$

Entonces método es de **primer orden**.

Estabilidad método de Euler (cont.)

Caso general,

$$
\begin{aligned}
y(t+h) &= y(t) + hy'(t) + O\left(h^2\right) \\
&= y(t) + hf(t, y(t)) + O\left(h^2\right)
\end{aligned}
$$

Tomando $t = t_k$ y $h = h_k$,

$$
\hat{y}(t_{k+1}) = \hat{y}\left(t_k\right) + h_k f\left(t_k, \hat{y}\left(t_k\right)\right) + O\left(h^2\right)
$$

Tomando la diferencia,

$$
\begin{aligned}
e_{k+1} &= \hat{y}_{k+1} - y(t_{k+1}) \\
&= \left[\hat{y}_k - y\left(t_k\right)\right] + h_k\left[f\left(t_k, \hat{y}_k\right) - f(t_k, y(t_k))\right] + O\left(h^2\right)
\end{aligned}
$$

Estabilidad método de Euler (cont.)

Si no existen errores iniciales, entonces

$$\begin{aligned} \hat{y}_k - y\left(t_k\right) &= 0 \\ h_k\left[f\left(t_k, \hat{y}_k\right) - f(t_k, y(t_k))\right] &= 0 \end{aligned}$$

y el error global l_k es de orden $O(h_k^2)$, por lo que el método de Euler es de primer orden.
Por Teorema del Valor Medio:

$$f(t_k, \hat{y}_k) - f(t_k, y(t_k)) = f'(\xi)\left(\hat{y}_k - y(t_k)\right)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= \left[\hat{y}_k - y\left(t_k\right)\right] + h_k\left[f\left(t_k, \hat{y}_k\right) - f(t_k, y(t_k))\right] + O\left(h^2\right) \\ &= \left(1 + h_k f'\right) e_k + l_{k+1} \end{aligned}$$

Estabilidad método de Euler (cont.)

Entonces, método es estable si

$$\left|1 + h_k f'\right| \leq 1$$

Para un sistema de ecuaciones,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

el método es estable si,

$$\rho\left(\mathbf{I} + h_k \mathbf{J}_f\right) \leq 1$$

donde $\rho(\mathbf{A}) = \max_i \left(|\lambda_i|\right)$, es el radio espectral de matriz $\mathbf{A}$ con valores propios λ_i.

Selección tamaño de grilla

Dos objetivos:

1. Usar grilla tan gruesa como posible para **reducir esfuerzo computacional.**
2. Usar grilla tal que método es estable y solución es **exacta**.

En el caso de método de Euler,

$$l_k \approx \frac{h_k^2}{2} y''$$

$\Rightarrow$ dada una tolerancia *tol* usar

$$h_k \leq \sqrt{2\, tol / |y''|}$$