

Diagrama de Voronoi

Definición: Sea $P=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un conjunto de puntos en el plano. Estos puntos son llamados sitios. Asignar a cada punto del plano el sitio más cercano. Todos los puntos asignados a p_i forman la region de Voronoi $V(p_i)$.

$$V(p_i) = \{x: |p_i - x| \leq |p_j - x| \ \forall \ i \neq j\}$$

Notar que no todos los puntos tiene un sitio más cercano: **Todos los puntos que tienen más de un sitio igual de cerca forman el Diagrama de Voronoi $V(P)$.** El diagrama se compone de arcos y vértices de Voronoi.

Cómo se ve $V(P)$?

Dos sitios: p_1 y p_2 . Sea $B(p_1, p_2) = B_{12}$ el bisector perpendicular del segmento $p_1 p_2$. B_{12} es el diagrama de Voronoi.

Diagrama de Voronoi

Tres sitios: p_1, p_2 y p_3 . El diagrama contiene los bisectores B_{12} , B_{13} y B_{23} . Los bisectores perpendiculares de los tres lados del triángulo formado por (p_1, p_2, p_3) p, el pasan por un punto, el circuncentro, el centro del unico círculo que pasa por los vértices del triángulo.

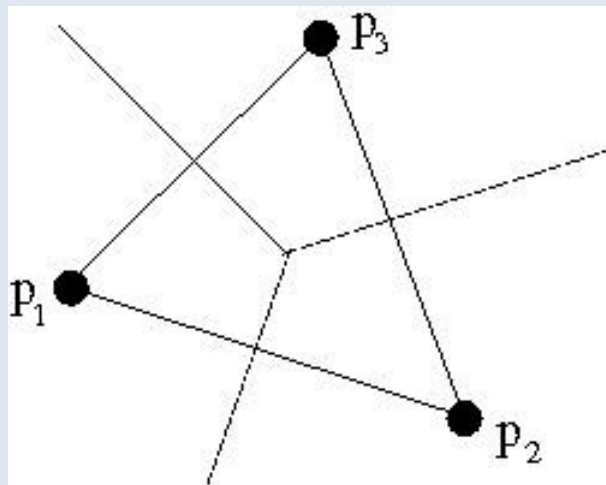


Diagrama de Voronoi

Ejemplo de problemas geométricos:

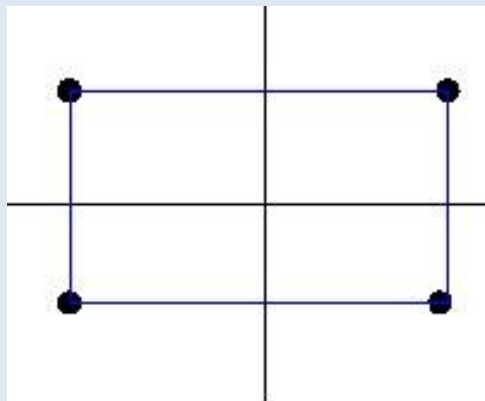
- Alguien camina en un campus y quiere saber cuál es la cabina telefónica más cercana. Cómo calcular computacionalmente la solución?
- Se tiene un conjunto de torres de observación de un bosque. Cada guardia es responsable de extinguir el fuego más cercano a su torre que al resto. Cómo determinar el área que le corresponde a cada guardia.
- Se desea simular como crece un cristal. Si suponemos que cada "semilla" de cristal crece a una razón uniforme y constante.Cuál sería una buena manera de simularlo?

Diagrama de Voronoi

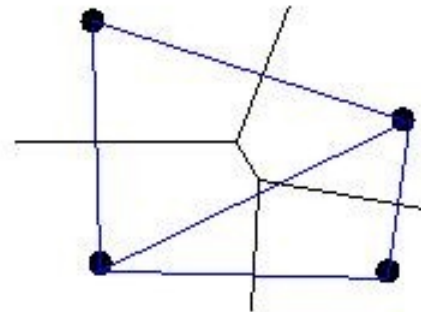
- **Generalización:** Sea $H(p_i, p_j)$ el semiplano cerrado con borde B_{ij} (bisector) conteniendo p_i , es decir, $H(p_i, p_j)$ contiene todos los puntos más cercanos a p_i que a p_j .
 - $V(p_i) = \bigcap H(p_i, p_j)$
- La intersección de semiplanos es un espacio convexo. Cada región de Voronoi es una región convexa.
- Cuántas regiones de Voronoi hay? uno por cada sitio.
- Implementaciones de algoritmos
 - <http://www.cs.cornell.edu/home/chew/Delaunay.html>
 - <http://www.personal.kent.edu/~rmuhamma/Compgeometry/MyCG/CG-Applets/VoroDiagram/vorocli.htm>

Triangulación de Delaunay

- Es el grafo dual $G(P)$ del diagrama de Voronoi $V(P)$
- Cómo se construye?
 - Agregar un arco por cada par de sitios que comparte un arco de Voronoi
 - Todas las caras de G son triángulos, en donde a cada uno le corresponde un vértice de Voronoi, si no hay sitios co-circulares.
- El grado de un vértice de Voronoi está definido por el número de sitios equidistantes a él.



Sitios co-circulares



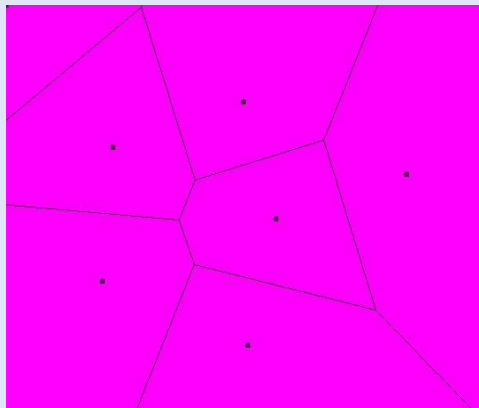
No hay sitios co-circulares

Propiedades

- Dado que son estructuras duales, la triangulación de Delaunay $D(P)$ y el diagrama de Voronoi $V(P)$ contienen la misma información en algún sentido, pero la representan de otra forma
- Triangulación de Delaunay
 - $D(P)$ es una triangulación si no hay puntos co-circulares
 - A cada triángulo de $D(P)$ le corresponde un vértice de Voronoi de $V(P)$
 - A cada arco en $D(P)$ le corresponde un arco en $V(P)$
 - A cada vértice en $D(P)$ (sitio) le corresponde una región en $V(P)$
 - El borde de $D(P)$ es la cerradura convexa de P
 - El interior de cada triángulo de $D(P)$ no contiene otros sitios de P

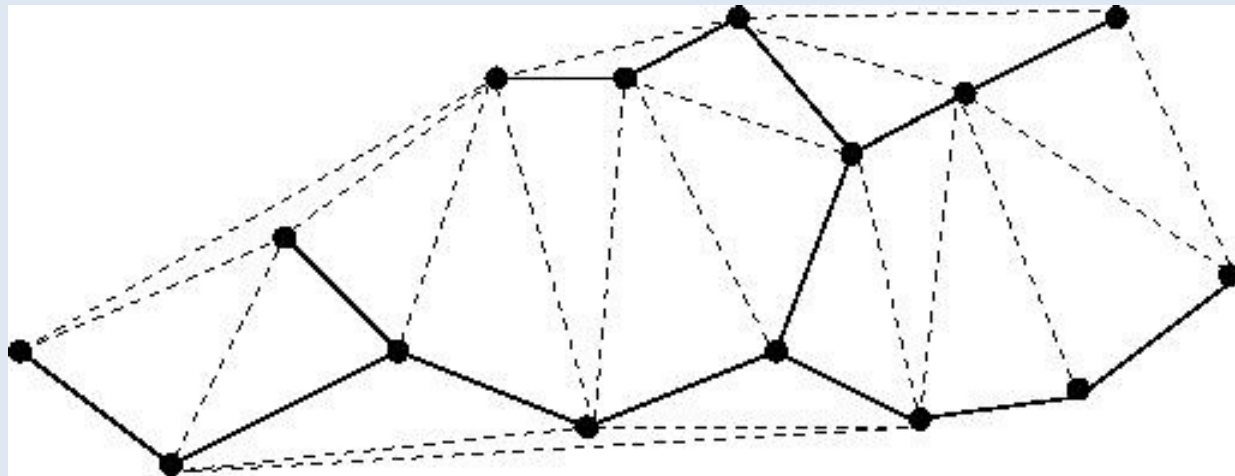
Propiedades

- Diagrama de Voronoi
 - Cada región de Voronoi es convexa
 - $V(p_i)$ es abierta si p_i está en la cerradura convexa de P
 - Si v es un vértice en la intersección de $V(p_1)$, $V(p_2)$ y $V(p_3)$, v es el centro del círculo $C(v)$ determinado por p_1, p_2 y p_3
 - $C(v)$ es el centro del circuncírculo del triángulo correspondiente a v
 - El interior de $C(v)$ no contiene sitios
 - Si p_j es el vecino más cercano a p_i entonces $p_i p_j$ es un arco en $D(P)$
- Cómo construir el diagrama de Voronoi?
 - Algoritmo incremental:
<http://www.personal.kent.edu/~rmuhamma/Compgeometry/MyCG/Voronoi/Incremental2/incremental2.htm>



Triangulaciones de Delaunay

- Por qué son tan usadas?
 - Para un conjunto de puntos P , es la triangulación que maximiza el ángulo mínimo.
 - Círculo vacío de radio más grande.
 - Qué problemas resuelve?
 - **Minimum spanning tree (MST)**: es el árbol de largo mínimo que cubre todos los puntos.
 - Es un subconjunto de la triangulación de Delaunay



Triangulaciones de Delaunay

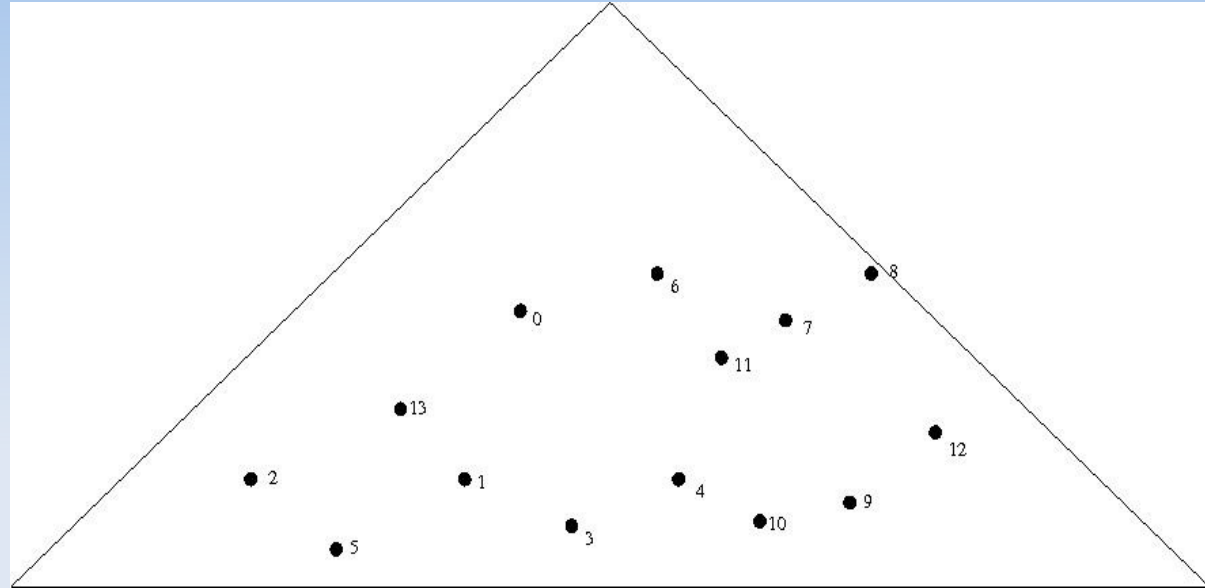
- Cómo se define el dominio a triangular en 2D?
 - Conjunto puntos P . Dominio definido por la cerradura convexa de estos.
 - Polígono simple
 - Más general: PSLG (Planar straight line graph). Es un conjunto de puntos y segmentos que no se cruzan; los segmentos solo pueden intersectarse en sus extremos
- Algoritmo de Watson:
 - Encierra los puntos en una triangulación ficticia (usa un triángulo que contiene el conjunto de puntos)
 - Por cada punto p en P : (*)
 - Buscar el triángulo que lo contiene
 - Modificar la triangulación para que siga siendo Delaunay

Triangulaciones de Delaunay

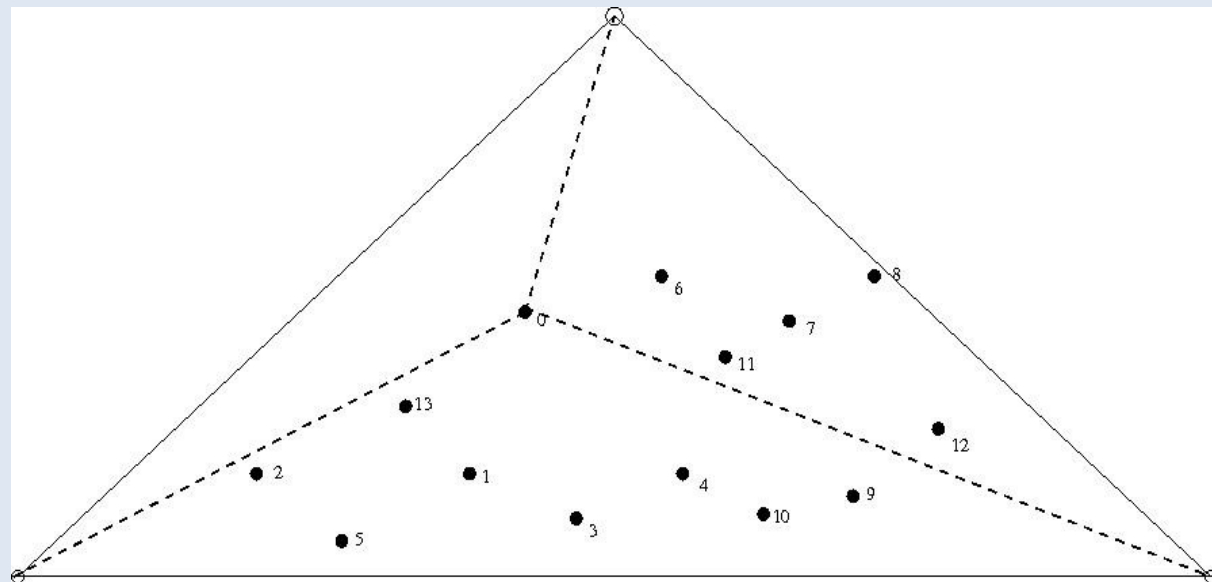
- (*) Primer algoritmo
 - Sea t el triángulo que contiene a p y p el punto a insertar
 - Unir p con cada vértice de t formando tres triángulos
 - While un nuevo triángulo no satisface la condición de Delaunay
 - Invertir el arco (diagonal) del cuadrilátero formado por los dos triángulos (edge-flip)
 - Notar que se forman dos nuevos triángulos
- Por qué converge?
 - Este proceso lleva a encontrar la triangulación que corresponde al Diagrama de Voronoi
- Qué casos especiales degenerados hay?
 - p está "sobre" un arco
 - p coincide con un vértice

Triangulaciones de Delaunay

Paso 1:

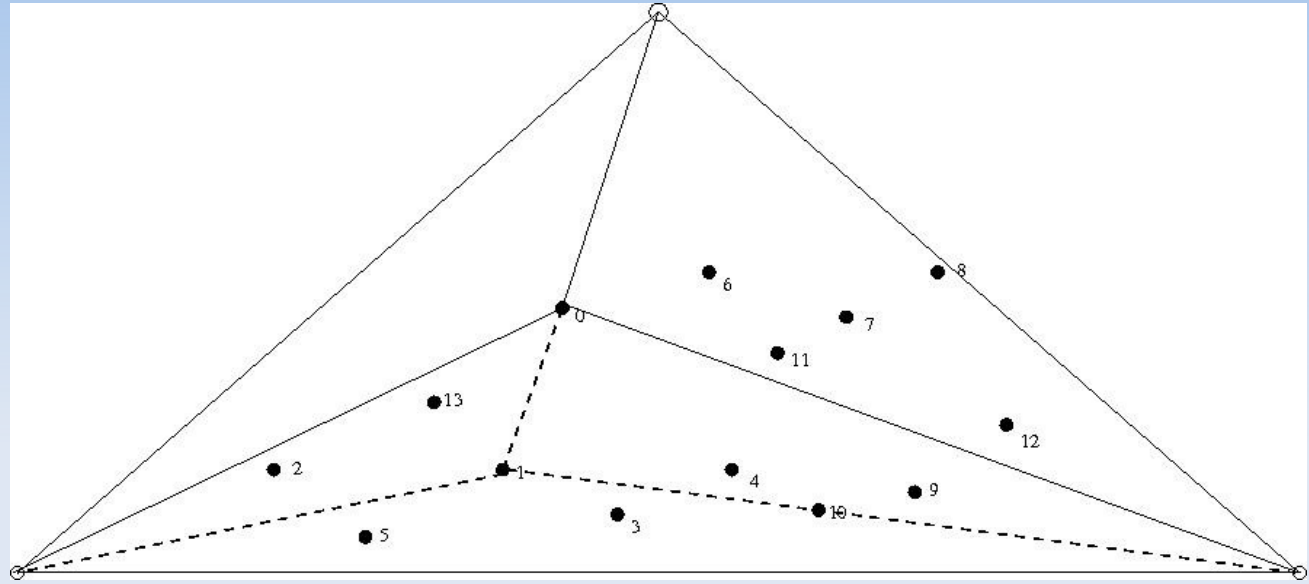


Paso 2:

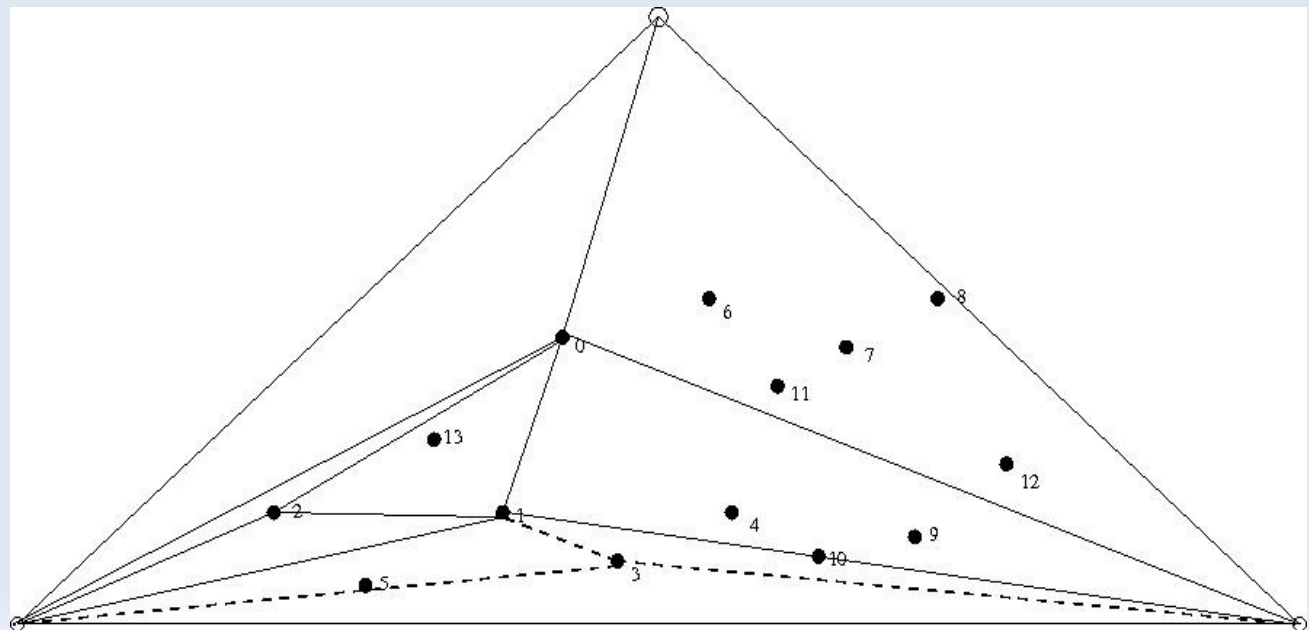


Triangulaciones de Delaunay

Paso 2:

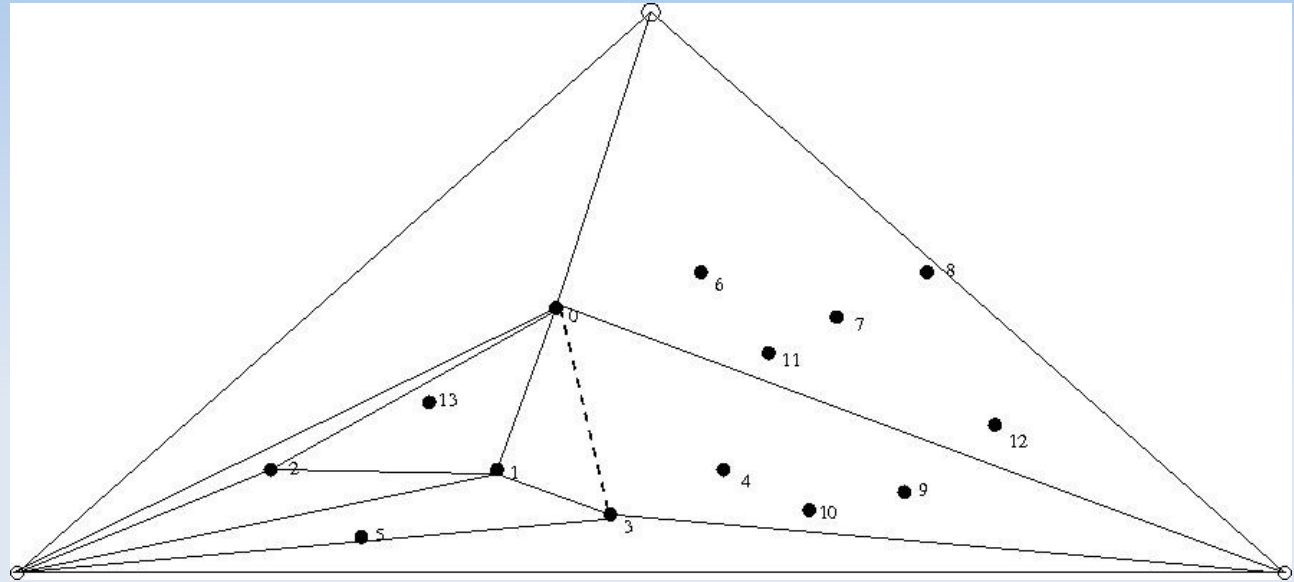


Paso 4:

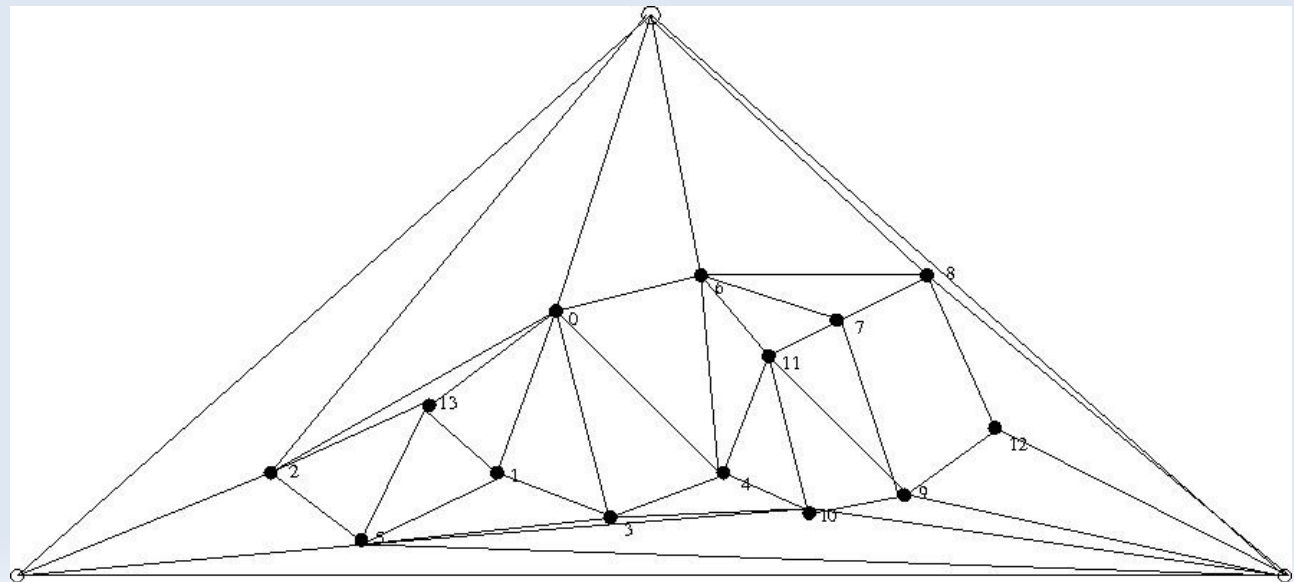


Triangulaciones de delaunay

Paso 4:



Fin: Falta eliminar
triángulos y vértices
ficticios



Triangulaciones de Delaunay

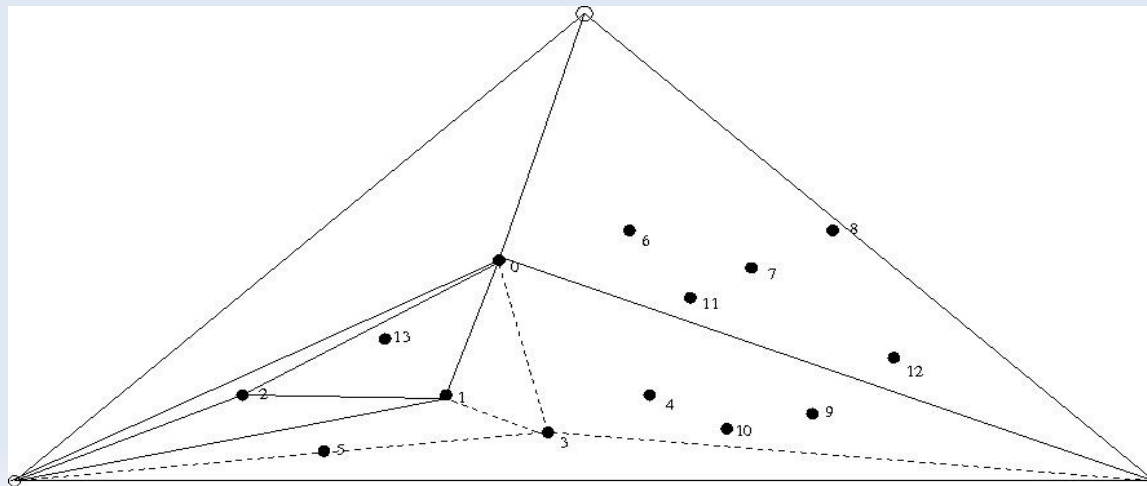
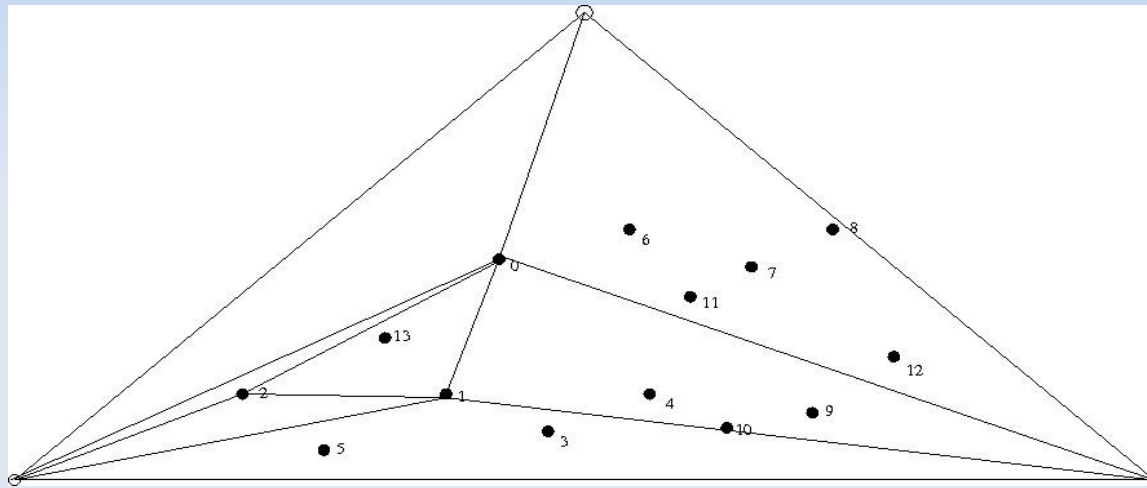
- Qué estructuras de datos y qué estrategias adicionales se necesitan para hacer la búsqueda de la información de manera eficiente?
 - Búsqueda del triángulo que contiene el punto a insertar
 - Obtener en $O(1)$ los triángulos que comparten en un arco
- Problema propuesto: Cómo calcular el diagrama de Voronoi a partir de la triangulación de Delaunay?

Triangulaciones de Delaunay

- (*) Segundo algoritmo: construcción de la cavidad
 - Encontrar todos los triángulos cuyos circuncírculos contienen a p y destruirlos
 - Conectar p con todos los vértices de la cavidad
- Es suficiente esta malla (triangulación) para la simulación de problemas complejos? No.
 - Es un buen punto de partida, es decir, una buena malla inicial.
 - Pero se necesitan algoritmos de:
 - **Refinamiento:** generación de una mayor densidad de puntos en regiones en donde se desean medir ciertos fenómenos
 - **Derefinamiento:** eliminar puntos en zonas que "no pasa nada" o casi nada
 - **Mejoramiento:** mejorar la calidad de la malla. Por ejemplo que todos los triángulos tengan un ángulo mínimo mayor a 20 grados

Triangulaciones de Delaunay

- (*) Segundo algoritmo: construcción de la cavidad
 - Encontrar todos los triángulos cuyos circuncírculos contienen a p y destruirlos
 - Conectar p con todos los vértices de la cavidad



Triangulaciones de Delaunay

- Programas open source para generar triangulaciones de Delaunay de calidad en 2D y 3D:
 - Triangulación de un dominio PSLG :
 - [Triangle](http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html) (<http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>)
 - Malla de tetraedros 3D de un dominio PLC (Piecewise linear complex):
[Tetgen](http://tetgen.berlios.de/) (<http://tetgen.berlios.de/>)
- Bibliografía:
 - Mark de Berg, Marc van Kreveld, Mark Overmars, Otfried Schwarzkopf. Computational Geometry: Algorithms and applications. Springer. 2000.
 - Joseph O'Rourke. Computational Geometry in C. Cambridge University Press, 1998.

Cerradura Convexa, Diagrama de Voronoi, Triangulación de Delaunay

- Software qhull (<http://www.qhull.org/>)
 - Calcula cerradura convexa, diagrama de Voronoi y triangulación de Delaunay en 2D, 3D y dimensiones mayores
 - Implementa el algoritmo quickhull para calcular la cerradura convexa
 - Calcula el diagrama de Voronoi a partir de la triangulación de Delaunay
 - Calcula volúmenes y áreas de superficies
- Visualización a través de geomview (<http://www.geomview.org/>)