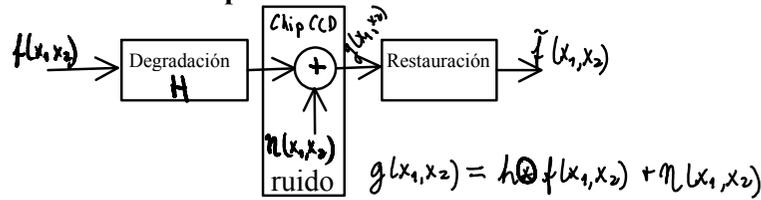


4. Restauración de imágenes

4.1 Restauración en presencia de ruido



n es un ruido, que muchas veces se considera como gaussiano, debido a que la transformada de Fourier de su auto-correlación (densidad espectral) es constante (al igual que la transformada de Fourier de la luz blanca.)

Auto-correlación:

$$r(t) = \int f(z) f(z-t) dz = \langle f(z), f(z-t) \rangle = f(t) \otimes f(-t)$$

La densidad espectral es la transformación de Fourier de la auto-correlación

$$\phi(j\omega) = F\{r(t)\} = F(j\omega) F^*(j\omega) = |F(j\omega)|^2$$

Si la señal no está auto-correlacionada (como el ruido blanco gaussiano), su auto-correlación es un delta de Dirac $\delta(t)$, y su transformada de Fourier es una constante.

Volviendo al sistema con ruido aditivo:

$$(*) \quad G(j\omega_1, j\omega_2) = H(j\omega_1, j\omega_2) F(j\omega_1, j\omega_2) + N(j\omega_1, j\omega_2)$$

4.2 Distribuciones de ruido

Diferentes distribuciones con este tipo de ruido no auto-correlacionado según su densidad de probabilidad (PDF):

i) Gaussiano: $p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ μ : media
 Ruido c/temperatura σ : varianza
 E_i: Chip CCD

ii) Rayleigh: $p(y) = \begin{cases} \frac{2}{b}(y-a)e^{-\frac{(y-a)^2}{b}} & y \geq a \\ 0 & y < a \end{cases}$ $\mu = a + \sqrt{\frac{\pi b}{4}}$
 ing. rango $\sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4}$

iii) Erlang (gamma) $p(y) = \begin{cases} \frac{a^b y^{b-1}}{(b-1)!} e^{-ay} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$ $\mu = b/a$
 (láser) $\sigma^2 = b/a^2$

iv) Exponencial: $p(y) = \begin{cases} a e^{-ay} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$ $\mu = 1/a$
 (láser) $\sigma^2 = 1/a^2$
 (Erlang b=1)

v) Uniforme: $p(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq y \leq b \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$ $\mu = \frac{a+b}{2}$
 $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

vi) Impulso $p(y) = \begin{cases} p_a & y = a \\ p_b & y = b \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$ Δ_j $a=0$
 Sal y pimienta: $b=255$
 (transientes rápidos)

Recordar que $\mu = \int y p(y) dy$, $\sigma^2 = \int (y-\mu)^2 p(y) dy$

4.3 Estimación de la degradación por experimentación

Si no se considera el ruido (o su valor es nulo), se mide la respuesta al impulso, donde la transformada de Fourier del impulso es A:

$$H(j\omega_1, j\omega_2) = \frac{G(j\omega_1, j\omega_2)}{A}$$

4.4 Filtro inverso:

Supongamos que tenemos el filtro de degradación $h(\cdot)$. \hat{F} se puede calcular al dividir la imagen obtenida por la degradación

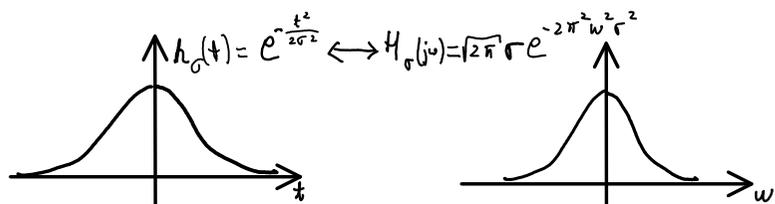
$$\hat{F}(j\omega_1, j\omega_2) = \frac{G(j\omega_1, j\omega_2)}{H(j\omega_1, j\omega_2)}$$

Al reemplazar en la ecuación (*)

$$\hat{F}(j\omega_1, j\omega_2) = F(j\omega_1, j\omega_2) + \frac{N(j\omega_1, j\omega_2)}{H(j\omega_1, j\omega_2)}$$

Aunque se supiera la función H, la transformada de Fourier del ruido es desconocida, por lo que se necesitan supuestos adicionales para poder restaurar la imagen original.

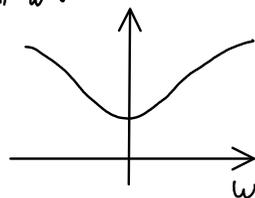
Por ejemplo si la función de degradación fuera una función gaussiana, tenemos que la transformada de Fourier del kernel de convolución gaussiano



Como la función inversa es

$$H_{\sigma}^{-1}(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{2\pi^2 w^2 \sigma^2}$$

Amplifica las altas frecuencias, por lo que el filtro inverso es inestable (amplifica las altas frecuencias del ruido)



4.5 Filtro de mínimo error cuadrático (Wiener)

Si se consideran el ruido y la imagen como ruido como procesos aleatorios

el error $e^2 = E\{(f - \tilde{f})^2\}$ será la varianza

El \tilde{f} que minimiza el e^2 :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(j\omega_1, j\omega_2) &= \frac{H^*(j\omega_1, j\omega_2) S_f(j\omega_1, j\omega_2)}{S_f(j\omega_1, j\omega_2) |H(j\omega_1, j\omega_2)|^2 + S_n(j\omega_1, j\omega_2)} G(j\omega_1, j\omega_2) \\ &= \frac{1}{H(j\omega_1, j\omega_2)} \frac{|H(j\omega_1, j\omega_2)|^2}{|H(j\omega_1, j\omega_2)|^2 + S_n(j\omega_1, j\omega_2)/S_f(j\omega_1, j\omega_2)} G(j\omega_1, j\omega_2) \end{aligned}$$

$$S_n(j\omega_1, j\omega_2) = |N(j\omega_1, j\omega_2)|^2 \quad \text{espectro del ruido}$$

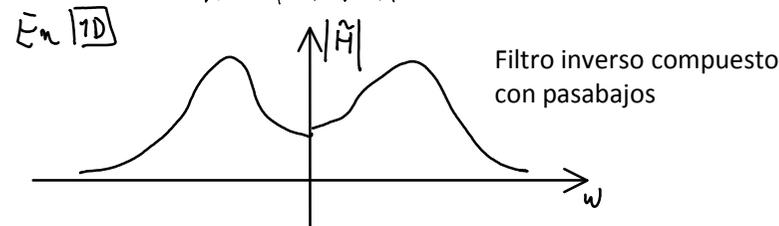
$$S_f(j\omega_1, j\omega_2) = |F(j\omega_1, j\omega_2)|^2 \quad \text{espectro de la imagen degradada}$$

Cuando no se sabe la imagen original

$$\frac{S_n(j\omega_1, j\omega_2)}{S_f(j\omega_1, j\omega_2)} = K \quad \begin{array}{l} \text{La señal-a-ruido} \\ \text{es constante} \end{array} \quad (SNR)$$

Finalmente

$$\tilde{F}(j\omega_1, j\omega_2) = \frac{1}{H(j\omega_1, j\omega_2)} \frac{|H(j\omega_1, j\omega_2)|^2}{|H(j\omega_1, j\omega_2)|^2 + K} G(j\omega_1, j\omega_2)$$



4.6 Filtro de Mínimos Cuadrados Restringido

Formulación vectorial

$$\vec{g} = H\vec{f} + \vec{n} \quad \text{Energía } \|\vec{g}\|^2 = (\vec{g}, \vec{g})$$

Mínimos cuadrados restringido

Hay que resolver $\min C = \int |\nabla^2 f|^2 d\Omega \rightarrow \nabla^2(\nabla^2 f)$ óptimo

s.a. $\|\vec{g} - H\vec{f}\|^2 = \|\vec{n}\|^2 \quad \lambda \equiv \nabla \cdot \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) = \Delta f$
 $m, p = 1$

Sabemos que la vers. discreta de C

$$C = \sum_{x_1=1}^M \sum_{x_2=1}^M (\nabla^2 f(x_1, x_2))^2$$

Al resolver

$$\tilde{E}(j\omega_1, j\omega_2) = \frac{H(j\omega_1, j\omega_2) G(j\omega_1, j\omega_2)}{|H(j\omega_1, j\omega_2)|^2 + \gamma |P(j\omega_1, j\omega_2)|^2}$$

Solución: hay que encontrar el γ óptimo

$$P(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \dots & 0 & -1 & \dots \\ \dots & -1 & 4 & \dots \\ \dots & 0 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

residuo $\vec{r} = \vec{g} - H\vec{f}$, depende de γ

$\phi(\gamma) = \|\vec{r}\|^2$ es monótona creciente en γ
 queremos ajustar γ de manera que

$$\|\vec{r}\|^2 = \|\vec{n}\|^2 \pm a, \quad \text{con } a \text{ la precisión}$$

4.7 Filtros de orden estadísticos

4.7.1 Filtro de Mediana

$$\hat{f}(x_1, x_2) = \text{mediana} \{ f(t_1, t_2) \}_{(t_1, t_2) \in S_{x_1, x_2}} \quad S_{x_1, x_2} : \text{máscara centrada en } (x_1, x_2)$$

4.7.2 Filtros max y min

$$\text{Max: } \hat{f}(x_1, x_2) = \max_{(t_1, t_2) \in S_{x_1, x_2}} \{ f(t_1, t_2) \}$$

$$\text{Min: } \hat{f}(x_1, x_2) = \min_{(t_1, t_2) \in S_{x_1, x_2}} \{ f(t_1, t_2) \}$$

4.7.3 Filtro de punto medio

$$\hat{f}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left\{ \max_{(t_1, t_2) \in S_{x_1, x_2}} \{ f(t_1, t_2) \} + \min_{(t_1, t_2) \in S_{x_1, x_2}} \{ f(t_1, t_2) \} \right\}$$

Este filtro tiene un buen desempeño para imágenes con ruido distribuido en forma aleatoria, como en el caso de ruido gaussiano y ruido uniforme

4.7.4 Filtros de reducción local del ruido

$$\hat{f}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - \frac{\sigma_I^2}{\sigma_{S_{x_1, x_2}}^2} \{ f(x_1, x_2) - m_{S_{x_1, x_2}}(x_1, x_2) \}$$

donde $m_{S_{x_1, x_2}}(x_1, x_2) = \text{media} \{ f(t_1, t_2) \}_{(t_1, t_2) \in S_{x_1, x_2}}$ Media móvil

$$\sigma_{S_{x_1, x_2}}^2(x_1, x_2) = \text{varianza} \{ f(t_1, t_2) \}_{(t_1, t_2) \in S_{x_1, x_2}}$$

$$\sigma_I^2 = \text{varianza} \{ f(t_1, t_2) \}_{(t_1, t_2) \in \text{Imagen}}$$

4.8 Filtros Homomórficos

Como el modelo de iluminación es

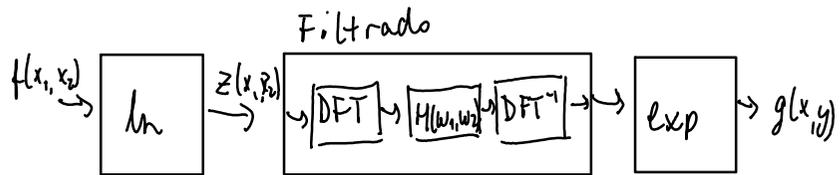
$$f(x_1, x_2) = i(x_1, x_2) \cdot r(x_1, x_2) \leftrightarrow \mathcal{F}\{f(x_1, x_2)\} \neq \mathcal{F}\{i\} \cdot \mathcal{F}\{r\}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } z(x_1, x_2) &= \ln(i(x_1, x_2) \cdot r(x_1, x_2)) \\ &= \ln(i(x_1, x_2)) + \ln(r(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

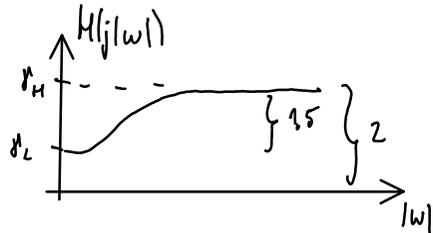
$$\Downarrow$$

$$Z(j\omega_1, j\omega_2) = \underbrace{F_i(j\omega_1, j\omega_2)}_{\text{Bajas frecuencias}} + \underbrace{F_r(j\omega_1, j\omega_2)}_{\text{Altas frecuencias}}$$

Iluminación \rightarrow Bajas frecuencias Altas frecuencias



típicamente



$$\text{donde } |w| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

$$g_L < 1 \quad (\text{p. ej. } 0.5)$$

$$g_H > 1 \quad (\text{p. ej. } 2.0)$$

Ejemplo de filtro homomórfico



$\downarrow \ln$



$\times 2.0$

$\downarrow 1.5 \times \text{conv}(\text{media móvil})$



\oplus

$\downarrow \exp$



4.9 Ejemplo de wavelets con B-spline

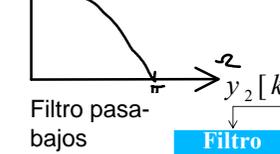
La descomposición por wavelets se basa en filtros pasa-bajos y filtros pasa-altos que se aplican en forma progresiva y que se basan en funciones de soporte local

Ejemplo Haar Wavelet
media móvil(ancho m=2)

$$L[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-1])$$

$$L(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(1 + e^{j\omega})$$

$$|L| = e^{j\frac{\omega}{2}} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

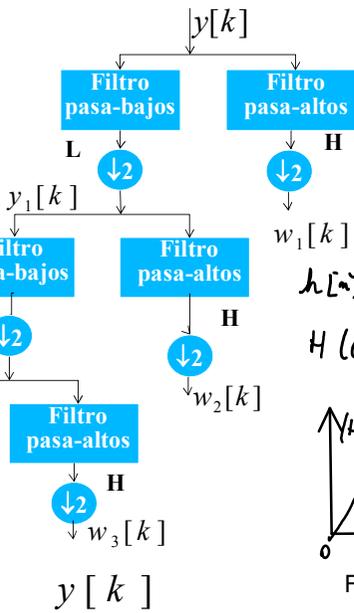


Filtro pasa-bajos

Filtro pasa-bajos

Filtro pasa-bajos

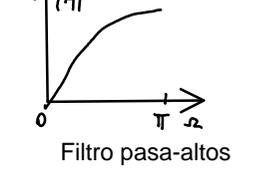
Filtro pasa-bajos



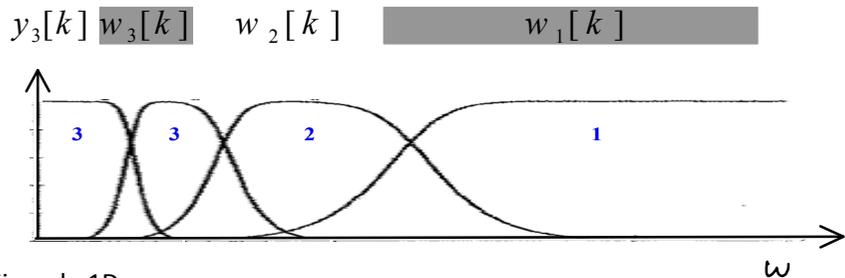
$$h[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] - \delta[n-1])$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-j\omega})$$

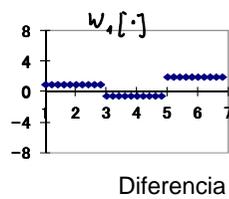
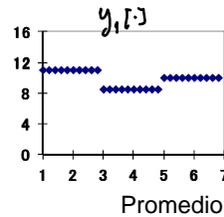
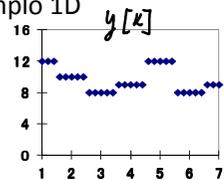
$$= -j e^{-j\frac{\omega}{2}} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$



Filtro pasa-altos

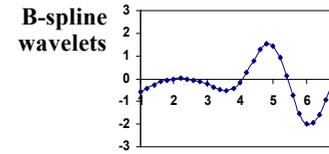
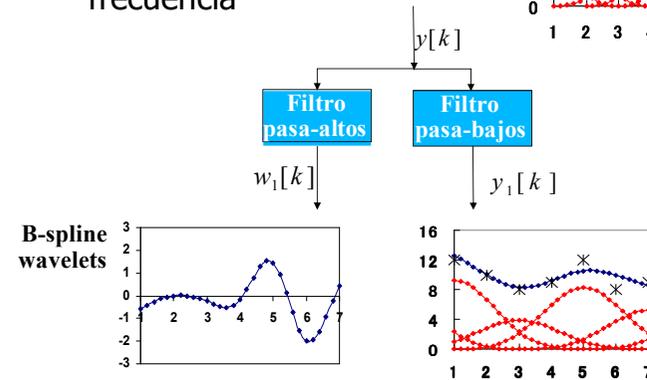
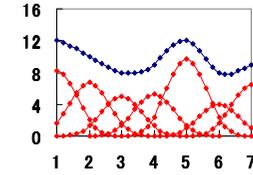


Ejemplo 1D



Ejemplo Wavelet con B-spline de orden mayor

Decomposición en diferentes canales de frecuencia



Ejemplo 2D Haar Wavelet:

