3. Procesamiento de Imágenes

3.1 Transformada discreta de Fourier en 2D

Una señal periódica con períodos N_1 y N_2 en sus coordenadas x_1 y x_2, respectivamente, tiene una trasformada de Fourier definida como

$$\hat{X}[k_1,k_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[n_1,n_2]\, W_{N_1}^{-k_1 n_1} W_{N_2}^{-k_2 n_2}$$

y una trasformada inversa

$$x[n_1,n_2] = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \hat{X}[k_1,k_2]\, W_{N_1}^{k_1 n_1} W_{N_2}^{k_2 N_2}$$

3.2 Convoluciones discretas en 2D

Una convolución discreta en 2D se puede definir como

$$f_1 * f_2[n_1,n_2] = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} f_1[k_1,k_2]\, f_2[n_1-k_1, n_2-k_2]$$

Si f2 es un filtro separable de Manera que el cálculo de la convolución se reduce a

$$f_2[n_1,n_2] = f_{21}[n_1] \cdot f_{22}[n_2]$$

$$f_1 * f_2[n_1,n_2] = \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k_1=-\infty} f_1[k_1,k_2]\, f_{21}[n_1-k_1] \right\} f_{22}[n_2]$$

Lo que significa que la convolución se puede calcular primero a lo largo de las filas y luego a lo largo de las columnas en forma consecutiva (en cascada).
A este tipo de funciones las denominaremos funciones de producto tensorial.
Notar que en el caso de las transformadas de Fourier tanto discretas como continuas, el cálculo siempre se puede aplicar en a lo largo de las filas y luego a lo largo de las columnas en forma consecutiva. En el caso de los filtros en 2D solamente los filtros que se pueden descomponer en producto tensorial pueden ser calculados en forma indenpendiente.

3.3 Transformada Z en 2D

$$F(z_1,z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f[n_1,n_2]\, z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}$$

Transformada de Fourier

$$F(j\omega_1, j\omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)\, e^{-j\omega_1 x_1} e^{-j\omega_2 x_2}\, dx_1\, dx_2$$

$F(\Omega_1,\Omega_2)$ ↓ ó

$$F(e^{j\Omega_1}, e^{j\Omega_2}) = \sum_{n_2=0}^{N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1} f[n_1,n_2]\, e^{-j\Omega_1 n_1} e^{-j\Omega_2 n_2}$$

1D

a_1	a_0	a_1

2D

Caso general

a_2	a_1	a_2
a_1	a_0	a_1
a_2	a_1	a_2

→

a_1
a_0
a_1

Tensorial

a_1	a_0	a_1
a_1^2	$a_1 a_0$	a_1^2
$a_1 a_0$	a_0^2	$a_1 a_0$
a_1^2	$a_1 a_0$	a_1^2

Si se tiene una función desplazada y si

$f[k_1,k_2] \overset{F}{\longleftrightarrow} H(e^{j\Omega_1}, e^{j\Omega_2}) \in \mathbb{R}$ Fase cero $\boxed{\sphericalangle H = 0}$

$f[k_1-n_1, k_2-n_2] \overset{F}{\longleftrightarrow} H(e^{j\Omega_1}, e^{j\Omega_2}) \cdot \underbrace{e^{jn_1\Omega_1} \cdot e^{jn_2\Omega_2}}$

Fase lineal en Ω_1 y Ω_2

Si $\sphericalangle H(e^{j\omega}) = 0 \longrightarrow h[n]$ es función par

3.4 Generalizando las respuestas de frecuencia

Si se tiene una imagen

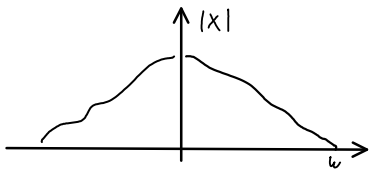
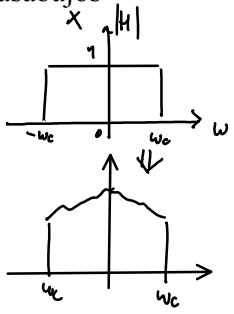
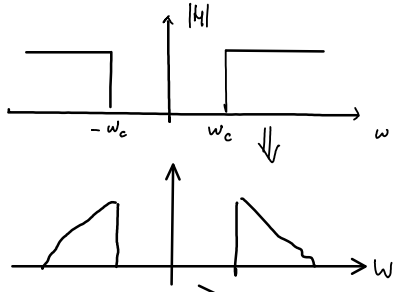


Imagen original

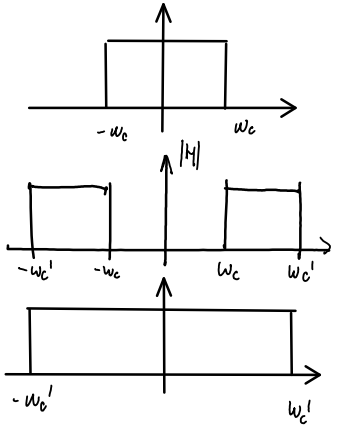
Filtro pasabajos



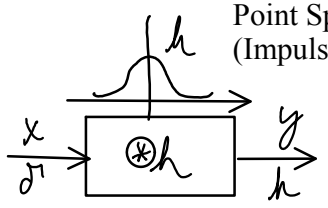
Filtro pasa-altos



Otro filtro: pasabanda



Point Spread Function (Impulse Response)



Inverse function

$$h^{\circ} \circledast h = \delta$$

Una forma de generar un filtro pasa-bajos

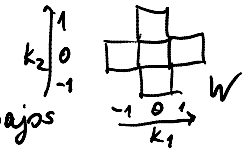
$$h_{HP}(x) = \delta(x) - h_{LP}(x) \longleftrightarrow H_{HP}(j\omega) = 1 - H_{LP}(j\omega)$$

3.5 Filtrado de imágenes - Operaciones espaciales

3.5.1 Filtro de Media: un filtro de media se puede definir como

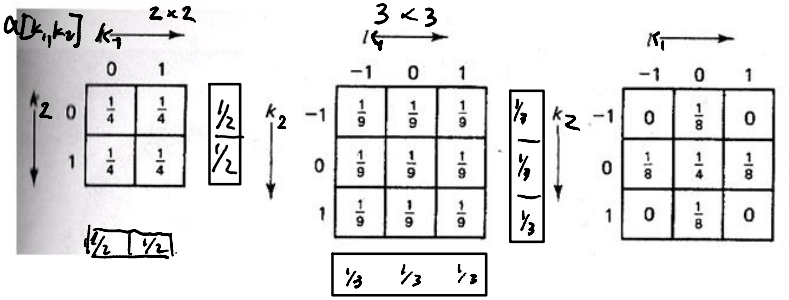
$$V(n_1, n_2) = \frac{1}{N_W} \sum_{(k_1,k_2)\in W} y(n_1-k_1, n_2-k_2) \qquad N_W = 5$$

donde W es la región de la ventana
Equivalente a una media móvil
Es un caso específico del filtro pasabajos



3.5.2 Filtros pasabajos: Recordemos que una máscara (filtro) se aplica según

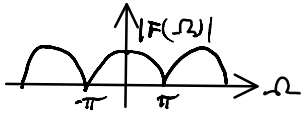
$$V(n_1, n_2) = \sum_{(k_1,k_2)\in W} a[k_1, k_2]\; y[n_1-k_1, n_2-k_2)$$



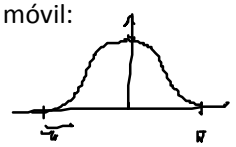
Caso 1D **Respuesta de frecuencia:**

$$F(e^{j\Omega}) = (2a_1 \cos\Omega + a_0)$$

Ejemplo $a_0 = 0$

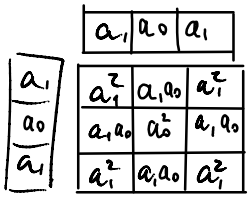


Ejemplo media móvil:
$a_0 = a_1 = 1 / 3$



Caso 2D

1. Producto tensorial 3x3

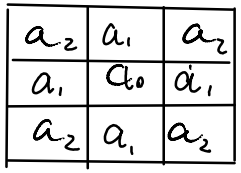


$$F(e^{j\Omega_1}, e^{j\Omega_2}) = (2a_1\cos\Omega_1 + a_0) \cdot (2a_1\cos\Omega_2 + a_0)$$

$$|\Omega_1|, |\Omega_2| \leq \pi$$

es una función periódica

2. Máscara 3x3 Genérica (simétrica)



recordar que

$$\hat{F}(z_1, z_2) = a_0 + a_1(z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1}) + a_2(z_1 + z_1^{-1})(z_2 + z_2^{-1})$$

$$\hat{F}(e^{j\theta_1}, e^{j\theta_2}) = a_0 + a_1(2\cos\theta_1 + 2\cos\theta_2) + a_2(2\cos\theta_1)(2\cos\theta_2)$$

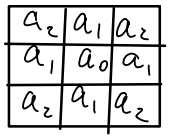
$$= a_0 + 2a_1(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + 4a_2\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2$$

$$\theta_1 = w_1 T_1, \quad \theta_2 = w_2 T_2$$

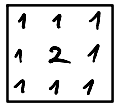
3.7 Ejemplo de convolución

$$y[n] = \sum x[k]\, h[n-k]$$

Usando la máscara:

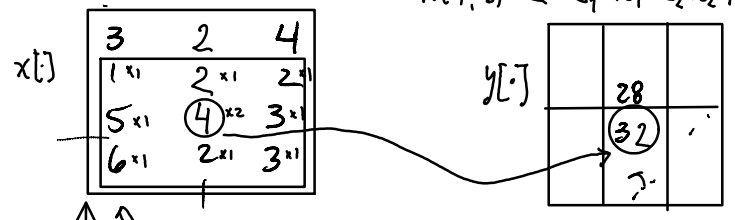


$h[\cdot]$



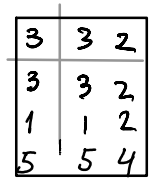
sobre la imagen

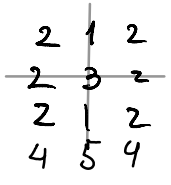
$$H(z_1, z_2) = 2 + z_1^{-1} + z_1 + z_2^{-1} + z_2 + (z_1 + z_1^{-1})(z_2 + z_2^{-1})$$

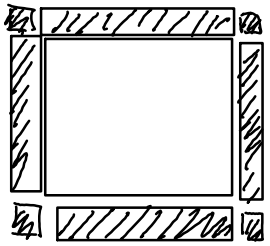


Espejo half-sample

Espejo full-sample





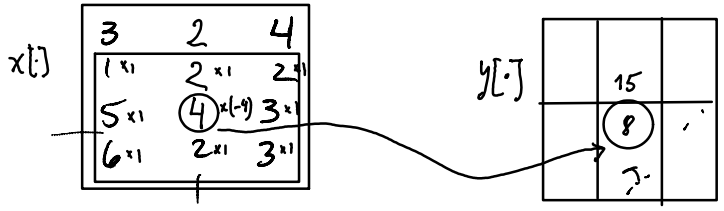


Hay que rellenar los bordes según criterio de borde (half-, full-sample)

Otro ejemplo:

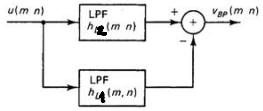
$$h[\cdot] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y[k_1, k_2] = \{ x[k_1 - 1, k_2] + x[k_1, k_2 - 1] + x[k_1 + 1, k_2] + x[k_1, k_2 + 1] - 4\, x[k_1, k_2] \}$$



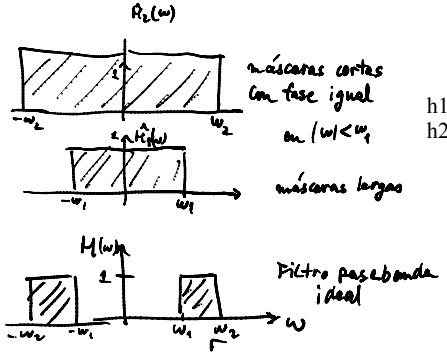
3.8 Otros ejemplos de filtros 2D

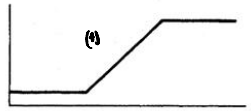
Diferencia de filtros pasabajos:



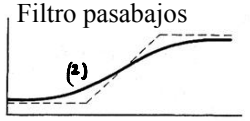
$$h_{12}(n_1,n_2) = h_2(n_1,n_2) - h_1(n_1,n_2)$$

h1 es típicamentede extensión larga y h2 es un filtro de extensión corta

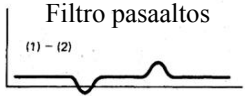


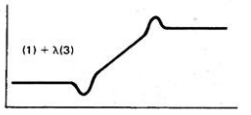


Filtro pasabajos

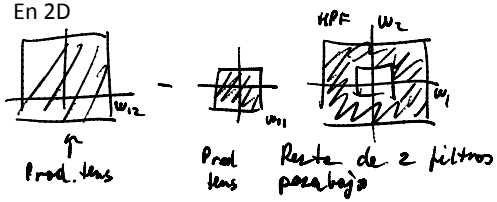


Filtro pasaaltos





En 2D



En general utilizaremos productos tensoriales en los filtros. Hay formas de diseñar respuestas de frecuencia en 1D y extender al en forma radial: Transf. de McLellan

Ejemplos

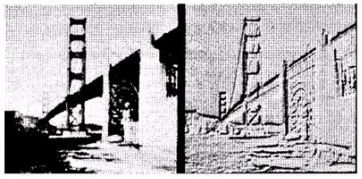
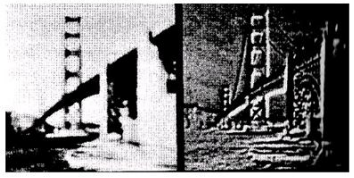


Imagen original

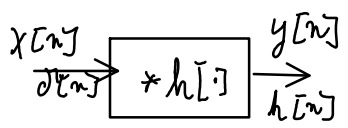
con filtro pasa-altos



con filtro pasabajos

con filtro pasabanda

3.9 Filtrado pasa-bajos 2D



$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

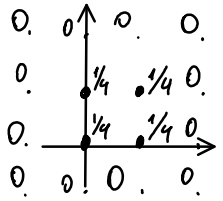
$$y[n_1,n_2] = \frac{1}{4}\{x[n_1,n_2] + x[n_1,n_2-1] + x[n_1-1,n_2] + x[n_1-1,n_2-1]\}$$

Si $h[n_1,n_2] = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \le n_1 \le 1,\ 0 \le n_2 \le 1 \\ 0, & \sim \end{cases}$

$$y[n_1,n_2] = h * x[n_1,n_2] = \sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}} h[n_1-k_1, n_2-k_2]\, x[k_1,k_2]$$

1/4	1/4
1/4	1/4

máscara



$$h[n_1,n_2] = \frac{1}{4}\{\delta[n_1,n_2] + \delta[n_1,n_2-1] + \delta[n_1-1,n_2] + \delta[n_1-1,n_2-1]\}$$

$$H(e^{j\Omega_1}, e^{j\Omega_2}) = \frac{1}{4}\left(1 + e^{-j\Omega_2} + e^{-j\Omega_1} + e^{-j(\Omega_1+\Omega_2)}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+e^{-j\Omega_2}\right)\left(1+e^{-j\Omega_1}\right)$$

$$= e^{-j\frac{(\Omega_1+\Omega_2)}{2}} \cos\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\Omega_2}{2}\right)$$

Amplitud

$$\left|H(e^{j\Omega_1}, e^{j\Omega_2})\right| = \left|\cos\tfrac{\Omega_1}{2}\cos\tfrac{\Omega_2}{2}\right|$$

Fase

$$\measuredangle H(e^{j\Omega_1}, e^{j\Omega_2}) = -\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}$$

Otros ejemplos 2D

Media móvil de 3x3

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

En general

a_0	a_1	a_2
a_3	a_4	a_5
a_6	a_7	a_8

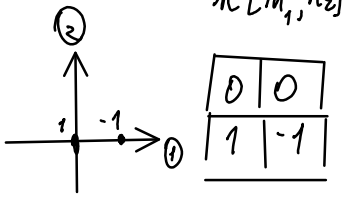
3.10 Filtrado mediante diferenciación en 2D

Derivadas direccionales, diferencia en

a) Dirección 1: $y[n_1,n_2] = x[n_1,n_2] - x[n_1-1,n_2]$

$$\downarrow$$

$h[n_1,n_2] = \delta[n_1,n_2] - \delta[n_1-1,n_2]$

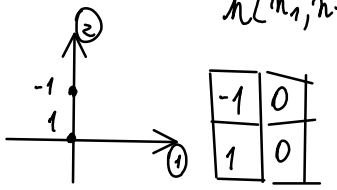


0	0
1	-1

b) dirección 2: $y[n_1,n_2] = x[n_1,n_2] - x[n_1,n_2-1]$

$$\downarrow$$

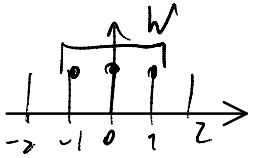
$h[n_1,n_2] = \delta[n_1,n_2] - \delta[n_1,n_2-1]$

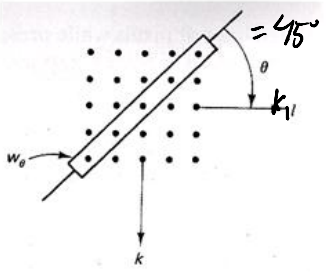


-1	0
1	0

3.11 Suavizado direccional

Corresponde a un suavizado en una dirección determinada





$$v(n_1,n_2,\theta) = \frac{1}{N_\theta} \sum_{(k_1,k_2)\in W_\theta} y(n_1-k_1, n_2-k_2)$$

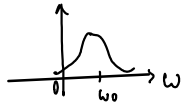
un caso más genérico de filtros pasa-bajos direccionales son los filtros de Gabor, consistente en una función gaussiana modulada.

$$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$h(x) = g_\sigma(x) \cdot e^{j(\omega_0 x + \theta_0)}$$

$$\updownarrow$$

$$H(j\omega) = G_\sigma(j(\omega-\omega_0))\, e^{j\theta_0}$$



3.12 Filtro de Mediana:

El píxel de entrada es reemplazado por la mediana de los píxeles contenidos en una ventana definida alrededor de dicho píxel. Este filtro corresponde a un filtro no lineal. Ventanas típicas son las cuadradas de 3x3, 5x5 o 7x7 píxeles.

Ejemplo: máscara

$v(n_1, n_2) = \text{mediana}\{ y(n_1 - k_1, n_2 - k_2), (k_1, k_2) \in W \}$

En 1D $y(n) = \{ \underset{n=0}{\uparrow} 2, 3, 8, 4, \underset{n=4}{\uparrow} 2 \}$ y $W = [-1, 0, 1]$

$v(0) = 2$ (cond. de borde) $\quad v(4) = 2$

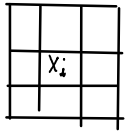
$v(1) = \text{mediana}\{2, 3, 8\} = 3$

$v(2) = \text{mediana}\{3, 8, 4\} = 4$

$v(3) = \text{mediana}\{8, 4, 2\} = 4$

Para la mediana, se ordenan los valores en forma ascendente (o descendente) y se selecciona el valor central.

En 2D:



orden $\quad$ mediana

$\{8, 7, 5, 5, 4, 1, 1, 0, 0\}$

Propiedades

1) Es un filtro no lineal : mediana { x(n) + y(n) } ≠ mediana { x(n) }+ mediana { y(n) }

2) Es utilizado para remover píxeles aislados con alta variabilidad con respecto a los vecinos (ej. ruido sal y pimienta) pero el filtro de mediana tiende a no suavizar bordes
3) Su desempeño no es bueno cuando el número de Píxeles con ruido supera la mitad del número de pixeles de la región W

3.13 Discretización del laplaciano

Ej.: Doble diferencia (discretización $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$)

$y[n] = h * (h * x)[n]$, $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

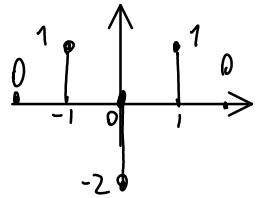
$= (h * h) * x[n]$

$h * h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

En 2D podemos tener lo mismo:

Máscara en dirección 1

1	-2	1



Dirección 2 $\frac{d^2 f}{dx_2^2} \Rightarrow$

1
-2
1

Sumando las 2 segundas derivadas se tiene el laplaciano:

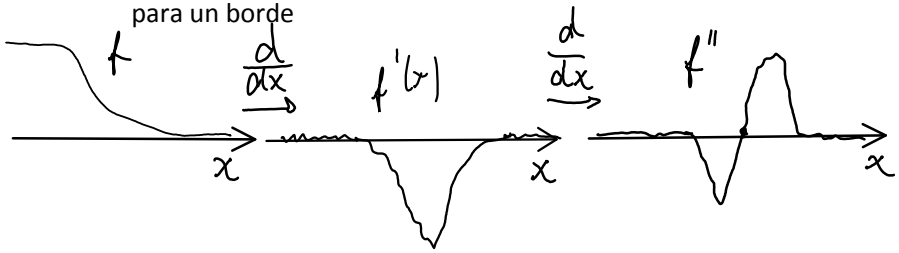
$\frac{d^2 f}{dx_1^2} + \frac{d^2 f}{dx_2^2} = \nabla^2 f \Rightarrow$

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

$\nabla^T \cdot \nabla = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ Laplaciano (escalar)

$\nabla \nabla^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$ Hessiano (matriz)

Discretización de 1er orden del Laplaciano

Al derivar una vez, se puede encontrar el máximo o mínimo para un borde

Al derivar 2 veces, se puede encontrar los cruces por cero para encontrar un borde