

2. Procesamiento de Señales 1D

2.1 El mundo análogo de sistemas LIT

Se tiene un sistema H siendo $\otimes$ la convolución

$$g(t) = h \otimes f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

usando $f(t) = e^{j\omega t}$, $j = \sqrt{-1}$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau$$

$$= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{entrada}} \underbrace{H(j\omega)}_{\text{valor } \mathcal{L}}$$

con la transf. de Fourier $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$

$f(t) = e^{j\omega t}$ es una función propia $Hf = \lambda f$ $H(j\omega)$: Valor propio

se puede descomponer $f(t) = a_1 \underbrace{e^{j\omega_1 t}}_{f_1(t)} + a_2 \underbrace{e^{j\omega_2 t}}_{f_2(t)} + a_3 \underbrace{e^{j\omega_3 t}}_{f_3(t)}$

$$g_1(t) = e^{j\omega_1 t} H(j\omega_1), \quad g_2(t) = e^{j\omega_2 t} H(j\omega_2), \quad g_3(t) = e^{j\omega_3 t} H(j\omega_3)$$

$$g(t) = a_1 H(j\omega_1) e^{j\omega_1 t} + a_2 H(j\omega_2) e^{j\omega_2 t} + a_3 H(j\omega_3) e^{j\omega_3 t}$$

Generalizando, para sistemas lineales e Inv. a la traslación

$$\text{Si } f(t) = \sum_k a_k e^{j\omega_k t}$$

∴ En general la salida $g(t) = \sum_k a_k H(j\omega_k) e^{j\omega_k t}$

Si tenemos $x_0(t)$, ¿Cómo obtenemos a_1, a_2 y a_3 ?

Realizamos una proyección de x_0 en el espacio de estas exponenciales base al realizar mínimos cuadrados

$$E = \|f(t) - f_0(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_0(t)|^2 dt$$

$$\min_{\{a_1, a_2, a_3\}} E \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial a_i} = 0, \quad i=1, 2, 3$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = \int_{-\infty}^{\infty} 2(f(t) - f_0(t)) \underbrace{\frac{\partial f_0(t)}{\partial a_i}}_{\frac{\partial f}{\partial a_i} = e^{j\omega_i t}} dt = 0$$

$$\mathcal{L} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega_i t} dt = \mathcal{L} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t) e^{j\omega_i t} dt, \quad i=1, 2, 3$$

$$\sum_{k=1}^3 a_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_k t} e^{j\omega_i t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t) e^{j\omega_i t} dt, \quad i=1, 2, 3$$

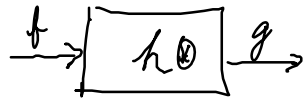
$$\sum_{k=1}^3 a_k \langle e^{j\omega_k t}, e^{j\omega_i t} \rangle = \langle f_0(t), e^{j\omega_i t} \rangle$$

Entonces, hay que resolver el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} \langle e^{j\omega_1 t}, e^{j\omega_1 t} \rangle & \langle e^{j\omega_2 t}, e^{j\omega_1 t} \rangle & \langle e^{j\omega_3 t}, e^{j\omega_1 t} \rangle \\ \langle e^{j\omega_1 t}, e^{j\omega_2 t} \rangle & \langle e^{j\omega_2 t}, e^{j\omega_2 t} \rangle & \langle e^{j\omega_3 t}, e^{j\omega_2 t} \rangle \\ \langle e^{j\omega_1 t}, e^{j\omega_3 t} \rangle & \langle e^{j\omega_2 t}, e^{j\omega_3 t} \rangle & \langle e^{j\omega_3 t}, e^{j\omega_3 t} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f_0, e^{j\omega_1 t} \rangle \\ \langle f_0, e^{j\omega_2 t} \rangle \\ \langle f_0, e^{j\omega_3 t} \rangle \end{bmatrix}$$

2.2 Ejemplo de sistemas de ecuación diferencial lineales

- a) Si se tiene una ecuación diferencial de 1^{er} orden:



$$\frac{dg}{dt} + a g = f(t)$$

Como queremos encontrar una función $h(t)$ tal que $g(t) = h(t) \otimes f(t)$

Si $f(t) = e^{\alpha t}$, $g(t) = \lambda e^{\alpha t}$

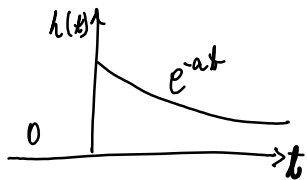
$$(\alpha \lambda + a \lambda) e^{\alpha t} = e^{\alpha t} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{(\alpha + a)} = H(\alpha)$$

En particular,

si $\alpha = j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(t) = e^{-at} u(t)$$

con $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ el escalón unitario o func. de Heaviside



Como $h(t) = 0$, $t < 0$ es una func. causal

Para una ecuación de 2^o orden:

$$a_2 \frac{d^2 g}{dt^2} + a_1 \frac{dg}{dt} + a_0 g = f(t)$$

La solución particular

$$\mathcal{F} \left\{ a_2 \frac{d^2 g}{dt^2} + a_1 \frac{dg}{dt} + a_0 g = f(t) \right\} \Rightarrow a_2 (j\omega)^2 G(j\omega) + a_1 (j\omega) G(j\omega) + a_0 G(j\omega) = F(j\omega)$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{\underbrace{a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0}_{H(j\omega)}} F(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{A_+}{a_+ + j\omega} + \frac{A_-}{a_- + j\omega} \Leftrightarrow h(t) = \{A_+ e^{-a_+ t} + A_- e^{-a_- t}\} u(t)$$

Las ecuaciones diferenciales generan sistemas causales

2.3 Propiedades de la Transformada de Fourier

$$\begin{aligned} x(t) &\Leftrightarrow X(j\omega) \\ y(t) &\Leftrightarrow Y(j\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt && \text{Transf. Fourier} \\ h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega && \text{Transf. Inversa} \end{aligned}$$

$$A x(t) + B y(t) \Leftrightarrow A X(j\omega) + B Y(j\omega) \quad \text{Linealidad}$$

$$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(j\omega) e^{-j\omega t_0} \quad \text{Desplazamiento en tiempo}$$

$$x(t) e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(j(\omega - \omega_0)) \quad \text{Desplazamiento en frecuencia}$$

$$x^*(t) \Leftrightarrow Y^*(-j\omega) \quad \text{Conjugación}$$

$$x(-t) \Leftrightarrow Y(-j\omega) \quad \text{Reversión de tiempo}$$

$$\int_{\mathbb{R}} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \Leftrightarrow X(j\omega) Y(j\omega) \quad \text{Convolución}$$

$$x(t) y(t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) Y(j(\omega_0 - \omega)) d\omega \quad \text{Multiplicación}$$

$$\frac{d(x)^n}{dt^n} \Leftrightarrow (j\omega)^n X(j\omega) \quad \text{Diferenciación (Derivación)}$$

$$\int_{-\infty}^t \bar{x}(\tau) d\tau \Leftrightarrow \left(\frac{1}{j\omega}\right) Y(j\omega) + \pi F(\omega) \delta(\omega) \quad \text{Integración}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{x}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad \text{Parseval (Energía)}$$

2.4 El mundo digital de señales y Sistemas



En el mundo discreto la convolución $g[n] = h * f[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] f[n-k]$

y usando $f[n] = z^n, z \in \mathbb{C}$

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] f[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k}$$

$$= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} = H(z) z^n$$

$z\{h\} = H(z)$ $\uparrow$ valor propio $\uparrow$ función propia
 Transformada Z h^* $H(z)$

$f[n] = z^n$ es la función propia de H

$$f[n] = a_1 (z_1)^n + a_2 (z_2)^n + a_3 (z_3)^n$$

Si tenemos $g_1[n] = z_1^n H(z_1), g_2[n] = z_2^n H(z_2), g_3[n] = z_3^n H(z_3)$

$$g[n] = a_1 H(z_1) (z_1)^n + a_2 H(z_2) (z_2)^n + a_3 H(z_3) (z_3)^n$$

En general si la salida

$$f[n] = \sum_k a_k z_k^n$$

$$g[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

2.5 Propiedades de la Transformada Z

Señal discreta $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), z \in \mathbb{C}$

$$A x[n] + B y[n] \longleftrightarrow A X(z) + B Y(z) \quad \text{Linealidad}$$

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow X(z) z^{-n_0} \quad \text{Desplazamiento en tiempo}$$

$$x^*[n] \longleftrightarrow Y^*(z) \quad \text{Conjugación}$$

$$x[-n] \longleftrightarrow Y(1/z) \quad \text{Reversión de tiempo}$$

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} x[r] y[n-r] \longleftrightarrow X(z) \cdot Y(z) \quad \text{Convolución}$$

$$x[n] y[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) Y\left(\frac{z}{v}\right) \frac{1}{v} dv \quad \text{Multiplicación}$$

$$x[n] - x[n-1] \longleftrightarrow (1 - z^{-1}) X(z) \quad \text{Diferenciación (Derivación)}$$

+ cond. de borde

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \longleftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} X(z) \quad \text{Integración}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) X^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \frac{dz}{z} \quad \text{Parseval (Energía)}$$

2.6 De la transformada de Fourier a las series de Fourier

2.6.1 Periodización de las funciones

Al usar las funciones

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) \quad \text{y} \quad \bar{F}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j(\omega+n\omega_0))$$

entonces $\bar{f}(t)$ tiene período T , y $\bar{F}(j\omega)$ es periódico con período ω_0 .

Recordando que

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{La fórmula de Poisson}$$

por otro lado, $\bar{F}(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_1) e^{-jn\omega_1 T_1}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ Por la simetría

Sin embargo, $\bar{F}(\omega)$ no es la transformada de Fourier de $\bar{f}(t)$.

De la fórmula de Poisson, los valores de las muestras $\bar{F}(jn\omega_0)$ son iguales a los coeficientes de la serie de Fourier de la función periódica $T f(t)$.

$$\bar{F}_d(n) = \bar{F}(n\omega_0) = \int_{-T/2}^{T/2} \bar{f}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

De la integral de Fourier a las series de Fourier

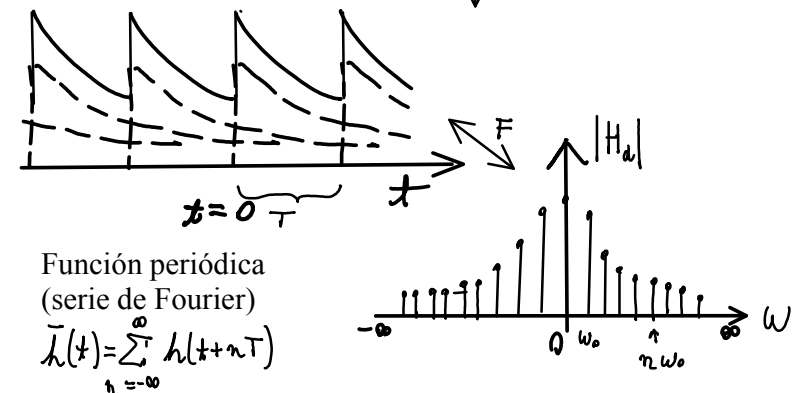
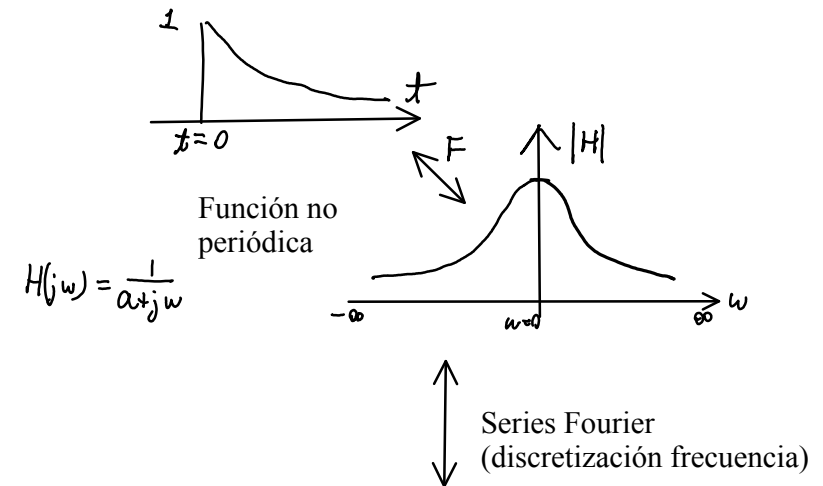
Si tenemos un segmento $f(t) = g(t) \pi_T(t)$ y queremos

obtener la transformada $G(j\omega)$ de una señal $g(t)$, tendremos

$$F(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(j(\omega - \tilde{\omega})) \frac{\sin \frac{1}{2} T \tilde{\omega}}{\pi \tilde{\omega}} d\tilde{\omega}$$

2.6.2 Ejemplo de discretización en frecuencia

$$h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$



Recordar algunas transformaciones

$$\begin{aligned} \delta(t) &\xleftrightarrow{F} 1 \\ \delta(t-t_0) &\xleftrightarrow{F} e^{j\omega t_0} \\ 1 &\xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \delta(\omega) \\ 2\pi e^{j\omega_0 t} &\xleftrightarrow{F} \delta(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

2.7 Propiedades de las Series de Fourier

Señal continua
(período T) $\bar{x}(t) \longleftrightarrow a_k$
 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ $\bar{y}(t) \longleftrightarrow b_k$ Coeficientes

$$A \bar{x}(t) + B \bar{y}(t) \longleftrightarrow A a_k + B b_k \quad \text{Linealidad}$$

$$\bar{x}(t - t_0) \longleftrightarrow a_k e^{jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk \frac{2\pi}{T} t_0} \quad \text{Desplazamiento en tiempo}$$

$$\bar{x}(t) e^{jM\omega_0 t} \longleftrightarrow a_{k-M} \quad \text{Desplazamiento en frecuencia}$$

$$\bar{x}^*(t) \longleftrightarrow a_{-k}^* \quad \text{Conjugación}$$

$$\bar{x}(-t) \longleftrightarrow a_{-k} \quad \text{Reversión de tiempo}$$

$$\int_T \bar{x}(\tau) \bar{y}(t - \tau) d\tau \longleftrightarrow T a_k b_k = c_k \quad \text{Convolución periódica}$$

$$\bar{x}(t) \bar{y}(t) \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} \quad \text{Multiplicación}$$

$$\frac{d^m \bar{x}}{dt^m} \longleftrightarrow (jk\omega_0)^m a_k \quad \text{Diferenciación (Derivación)}$$

$$\int_{-\infty}^t \bar{x}(\tau) d\tau \longleftrightarrow \left(\frac{1}{jk\omega_0} \right) a_k \quad \text{Integración}$$

$$\frac{1}{T} \int_T |\bar{x}(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{Parseval (Energía)}$$

2.8 De las series de Fourier a las series discretas de Fourier

2.8.1 Discretización en el tiempo

Siendo $\bar{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$

Si se tiene un entero arbitrario N y $T_1 = T/N$, las muestras

$$\bar{f}(mT_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 mT_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k W_N^{k \cdot m}, \quad W_N = e^{j \frac{2\pi}{N}}$$

Debido a que $\omega_0 T_1 = 2\pi/N$, W_N es la N-ésima raíz de 1,

y k puede ser escrita como $k = n + rN$, con $r \in \mathbb{Z}$ y

$n \in \mathbb{Z}[0, N-1]$, entonces $W_N^{km} = W_N^{(n+rN)m} = W_N^{nm}$

$$\bar{f}(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN} W_N^{(n+rN)m} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nm} \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN} \right)$$

Finalmente $\bar{f}(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{c}_n W_N^{nm}$ Los coeficientes $\bar{c}_n$ con aliasing
 $n = 0, 1, \dots, N-1$

Teorema fundamental:

Siendo $\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT)$ y $\bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_0)$

se tendrá $\bar{f}_d[n] = \bar{f}(nT_1) = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{N-1} \bar{F}(m\omega_0) W_N^{nm}$, con $W_N = e^{j \frac{2\pi}{N}}$

donde $T_1 = T/N$, $\omega_0 = 2\pi/T$, por lo que $\omega_1 = n\omega_0$ con N un entero arbitrario y T una constante arbitraria.

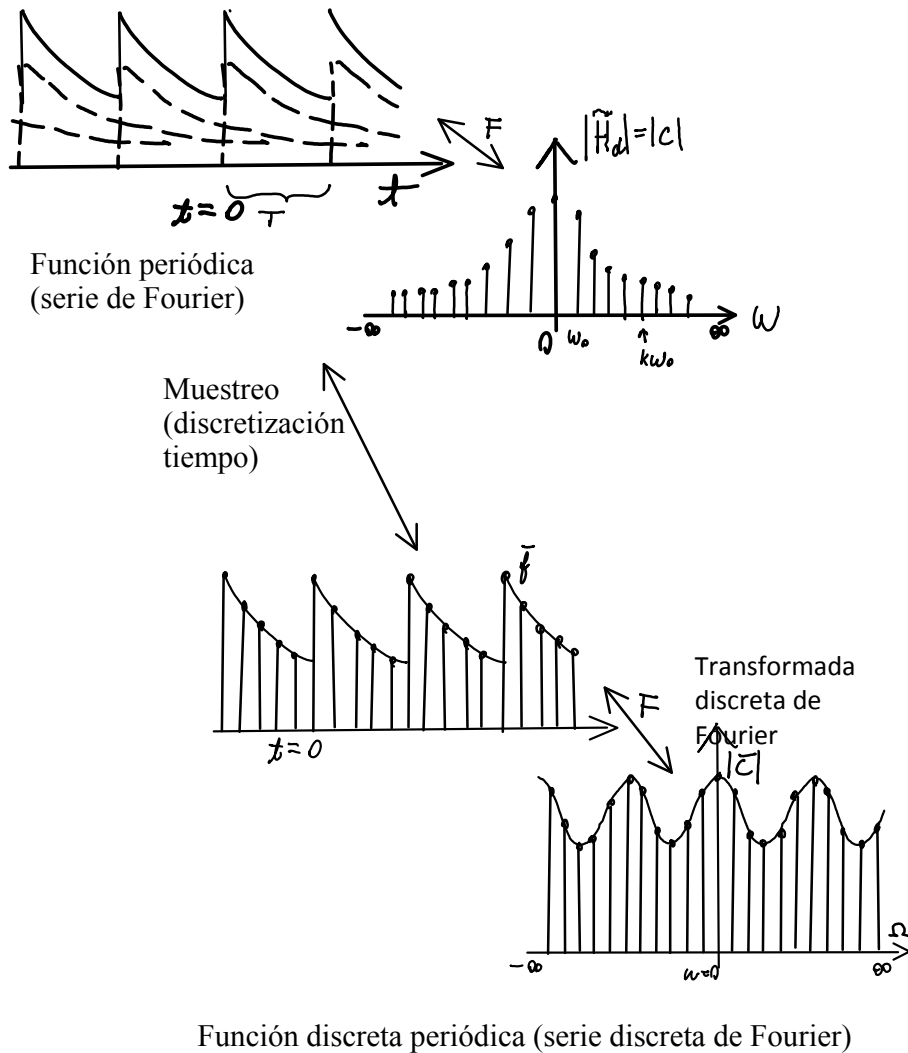
Utilizando la ecuación (*), se tendrá N ecuaciones de la forma:

$$\bar{f}_d[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \bar{c}_m W_N^{nm}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{y} \quad W_N = e^{j \frac{2\pi}{N}}$$

cuya solución será $\bar{c}_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{f}_d[n] W_N^{-nm}$ $n = 0, 1, \dots, N-1$

Hay una correspondencia uno-a-uno entre el par de series $\bar{f}_d[n] \longleftrightarrow \bar{c}_m$ formando la Serie Discreta de Fourier (DFS), donde ambas series tienen período N: $\bar{f}_d[n+N] = \bar{f}_d[n]$, $\bar{c}_{m+N} = \bar{c}_m$

2.8.2 Ejemplo de discretización en el tiempo



2.9 Propiedades de las Series Discretas de Fourier

Señal periódica discreta $\bar{x}[n] \leftrightarrow \tilde{a}_k$
 $\bar{y}[n] \leftrightarrow \tilde{b}_k$ Coeficientes Discretos (N)

$A\bar{x}[n] + B\bar{y}[n] \leftrightarrow A\tilde{a}_k + B\tilde{b}_k$ Linealidad

$\bar{x}[n - n_0] \leftrightarrow \tilde{a}_k e^{-j k \frac{2\pi}{N} n_0}$ Desplazamiento en tiempo

$e^{j M \frac{2\pi}{N} n} \bar{x}[n] \leftrightarrow \tilde{a}_{k-M}$ Desplazamiento en frecuencia

$x^*[n] \leftrightarrow \tilde{a}_{-k}^*$ Conjugación

$x[-n] \leftrightarrow \tilde{a}_{-k}$ Reversión de tiempo

$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r] y[n-r] \leftrightarrow N \tilde{a}_k \tilde{b}_k$ Convolución periódica

$\bar{x}[n] \bar{y}[n] \leftrightarrow \sum_{l=\langle N \rangle} \tilde{a}_l \tilde{b}_{k-l}$ Multiplicación

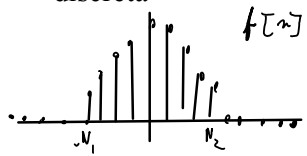
$\bar{x}[n] - \bar{x}[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j k \frac{2\pi}{N}}) \tilde{a}_k$ Diferenciación (Derivación)

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j k \frac{2\pi}{N}}} \tilde{a}_k$ Integración

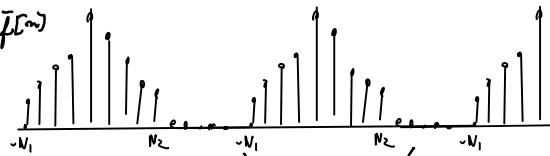
$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |\tilde{a}_k|^2$ Parseval (Energía)

2.10. Transformada de Fourier en tiempo discreto

Una señal aperiódica discreta



Se puede periodizar $\tilde{f}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n+Nk]$



Tenemos
$$\tilde{f}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \tilde{c}_k e^{jk \frac{2\pi}{N} \cdot n} = \sum_{k=\langle N \rangle} \tilde{c}_k W_N^{kn}$$

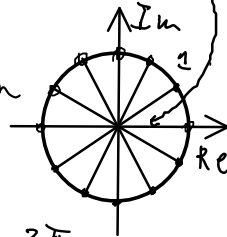
y la inversa
$$\tilde{A}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{f}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{f}[n] W_N^{-kn}$$

Para un intervalo de periodo $\langle N \rangle$ (cerca del origen)

$$\tilde{f}[n] = f[n]$$

$$\tilde{A}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{f}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

Pero definiendo
$$\tilde{F}(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\Omega n}$$



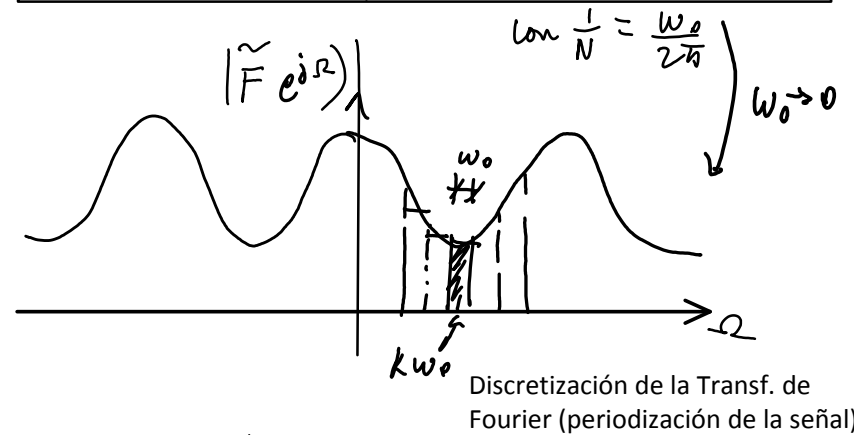
Por lo tanto
$$\tilde{A}_k = \frac{1}{N} \tilde{F}(e^{jk\omega_0})$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

$$\therefore \tilde{f}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} \tilde{F}(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$

Finalmente

$$\tilde{f}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} \tilde{F}(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \cdot \omega_0$$



Tenemos que la transformación de Fourier de una señal discreta será

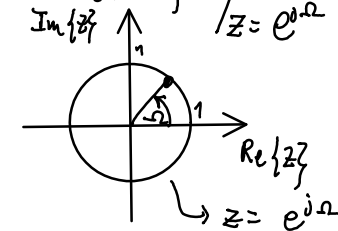
$$\tilde{F}(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\Omega n}$$

$$f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \tilde{F}(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Relación con transformada Z:

$$\tilde{F}\{x[n]\}(e^{j\Omega}) = \mathcal{Z}\{f[n]\}(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

Al utilizar condiciones de borde nulas y muestrear en el círculo unitario, podemos relacionar la transf. Z con la transf. de Fourier



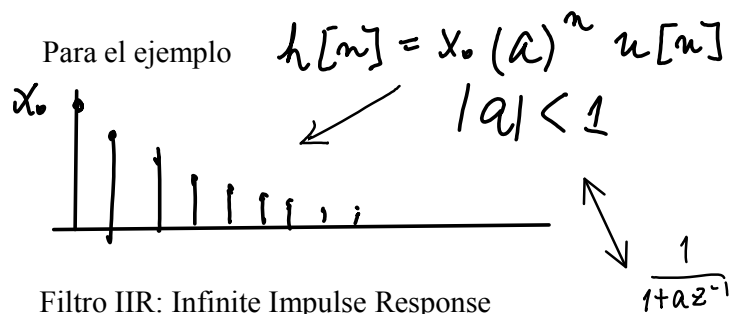
2.11 Filtros recursivos y no recursivos en 1D

2.11.1 Filtro recursivo : son filtros de respuesta infinita al impulso

$$y[n] = h * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k] \delta[k] \\ = h[n]$$

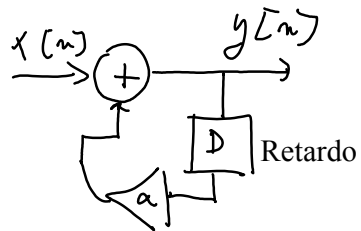
Ej. Atenuación exponencial

$$y[n] - a y[n-1] = x[n] \\ y[n] = a y[n-1] + x[n]$$



Filtro IIR: Infinite Impulse Response

Sabemos que $h[n]=0$ solamente cuando $n \rightarrow \infty$



D: retardo

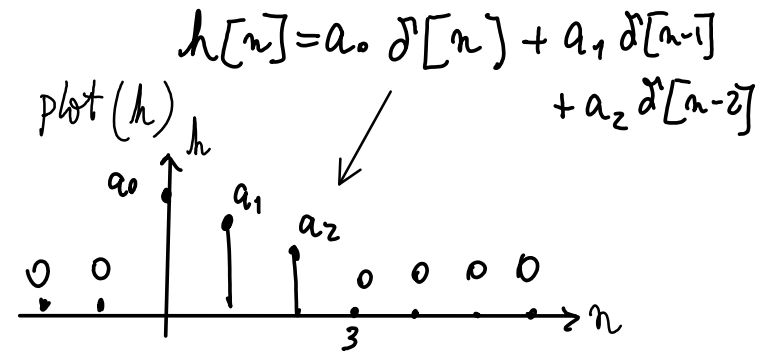
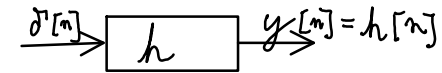
$$x[n+1] = D\{x[n]\}$$

2.11.2 Filtros no recursivos

No hay retroalimentación (hay convolución por máscara)

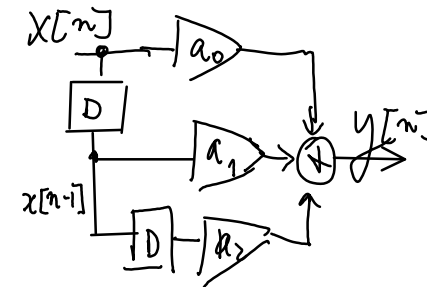
$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2]$$

Respuesta al impulso

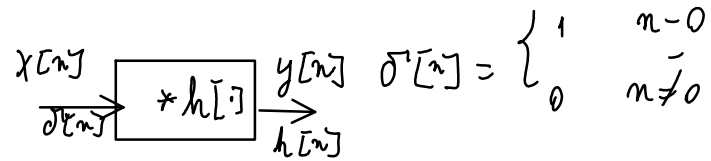


Respuesta finita al Inputo: FIR

$$h[n] = 0 \text{ con } n \geq 3$$

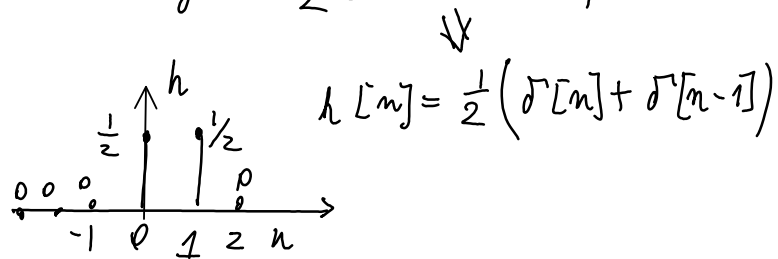


2.11.3 Ejemplo Filtrado pasabajos



Ejemplo: se tiene un sistema que promedia valores vecinos

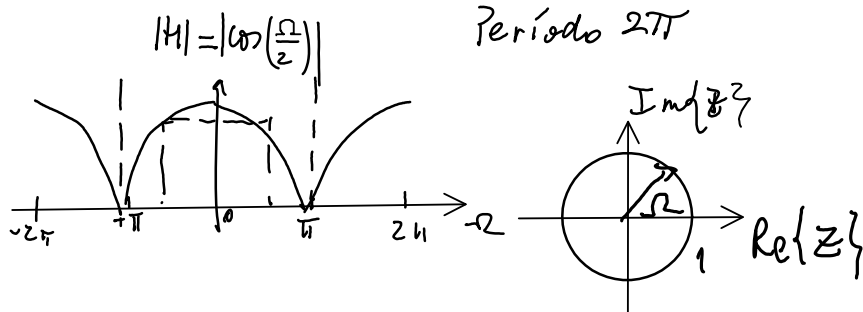
$$y[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x[n-1])$$



$$h[n] = \frac{1}{2} (\delta[n] + \delta[n-1])$$

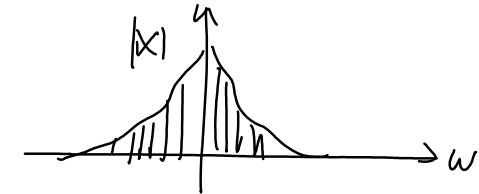
Transformada Z:

$$H(z) = \frac{1}{2} (1 + z^{-1}) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$



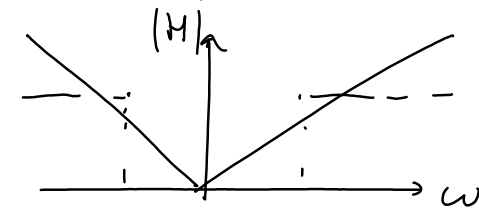
2.11.4 Ejemplo de filtrado mediante diferenciación 1D

Una función cualquiera



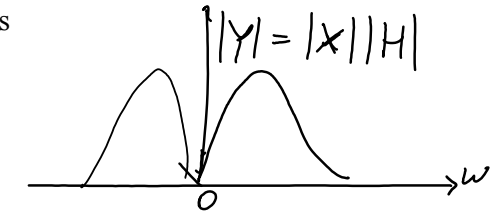
Al aplicar diferenciación

$$H(j\omega) = j\omega$$



Convolución de funciones

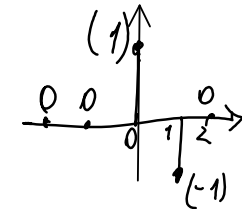
$$y = h * x$$



La función diferencia es

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$



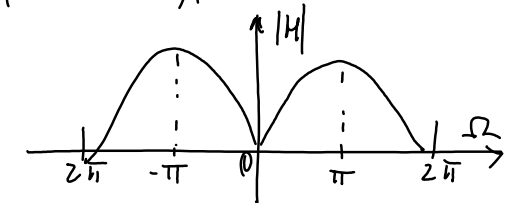
La respuesta de frecuencia

$$H(e^{j\Omega}) = 1 - e^{-j\Omega} = -e^{-j\frac{\Omega}{2}} 2j \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

$$|H(e^{j\Omega})| = |e^{-j\frac{\Omega}{2}}| 2 |j| |\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)|$$

$$= 2 \left| \sin \frac{\Omega}{2} \right|$$

Filtro pasa-altos discreto



2.11.5 Ejemplo de proceso de discretización

