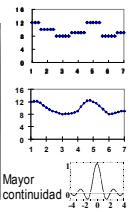
1. Procesamiento de Imágenes - Introducción

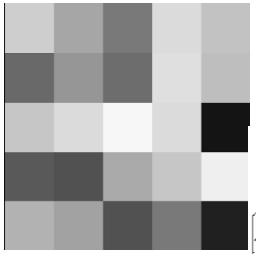
1.1 Acerca de las imágenes digitales y su representación

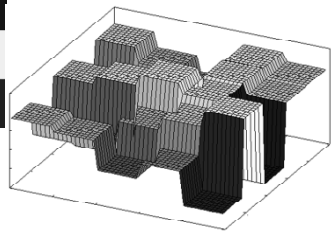
- ¿Qué es una imagen digital?

¿Arreglo de píxeles?



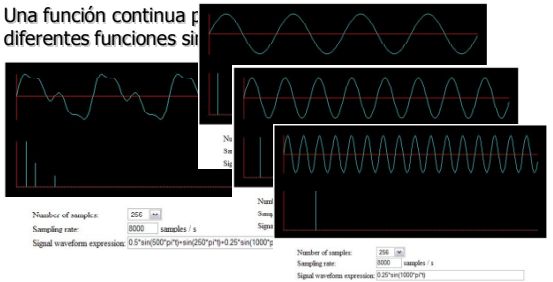
Detalle Imagen Digital





Representación de funciones en el Espacio de Fourier

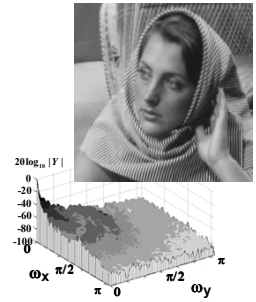
- Una función continua p
diferentes funciones si

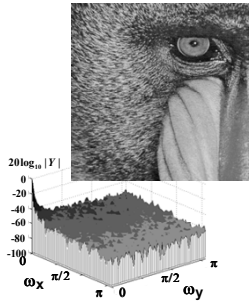


- Estas funciones están indexadas por su frecuencia, asociándoseles amplitud y fase

Ejemplos de imágenes 2D en el Espacio de Fourier

- Características de Amplitud





1.2 Sistemas Lineales e Invariantes a laTraslación (LTI)

1.2.1 Sistemas lineales $g(x) = \mathcal{K}(f(x))$

Linealidad Si $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{K}\{\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\} = \alpha_1 \mathcal{K}\{f_1(x)\} + \alpha_2 \mathcal{K}\{f_2(x)\}$$

entonces $\mathcal{K}$ es una operación lineal

En general, si $g_i(x) = \mathcal{K}(f_i(x))$ $i = 1, \ldots, N$

Para la linealidad

$$\mathcal{K}\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i(x)$$

$$g(x) = \int_{\Omega} K(x,y)\, f(y)\, dy$$

De hecho

$$\int_{\Omega} K(x,y) \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f(y)\, dy = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_{\Omega} K(x,y) f_i(y)\, dy$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i(x)$$

cumple con la condición de linealidad

La versión discreta $g[n] = \sum_{l \in \Omega} K[n,l]\, f[l]$

La versión matricial

$$\begin{bmatrix} g[1] \\ \vdots \\ g[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K[1,1] & K[1,2] & \cdots & K[1,L] \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ K[N,1] & \cdots & & K[N,L] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[1] \\ \vdots \\ f[L] \end{bmatrix}$$

1.2.1 Sistemas invariantes a la traslación

$$g(x - x_0) = \mathcal{K}(f(x - x_0))$$

Al reemplazar la linealidad en la invarianza a la traslación en la parte derecha:

$$\int_{\Omega} K(x,y)\, f(y - x_0)\, dy = \int_{\tilde{\Omega}} K(x, \tilde{y} + x_0)\, f(\tilde{y})\, d\tilde{y}$$

Mientras que en la izquierda $\int_{\Omega} k(x - x_0, y)\, f(y) = g(x - x_0)$

Para cumplir con la invarianza a la traslación y despreciando las condiciones de borde $K(x_1, y + x_0) = k(x - x_0, y)$

Por esta razón, $K(x_1, y) = h(x - y)$

En efecto $k(x_1, y + x_0) = h(x - (y + x_0)) = h((x - x_0) - y) = K(x - x_0, y)$

Por lo tanto para un sistema Lineal e Invariante a la Traslación (LIT):

$$g(x) = \int_{\Omega} h(x - y)\, f(y)\, dy = h \circledast f(x)$$

La convolución tiene la propiedad de conmutatividad $h \circledast f(x) = f \circledast h(x)$

La versión discreta $g[n] = \sum_{l \in \Omega} h[n - l]\, f[l] = \sum_{l \in \Omega} h[l]\, f[n - l]$

La versión matricial

$$\begin{bmatrix} g[1] \\ \vdots \\ g[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \iddots \\ h[-1] & h[0] & h[1] \\ & h[-1] & h[0] \; h[1] \\ & & h[-1] \; h[0] \; h[1] \\ \iddots & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[1] \\ \vdots \\ f[N] \end{bmatrix}$$

Matrices con m diagonales

1.3 Convolución

se define como la operación $\circledast$ como

$$g(t) = h \circledast f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tilde{\tau}) f(t-\tilde{\tau})\, d\tilde{\tau}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tilde{\tau})\, h(\tilde{\tau})\, d\tilde{\tau}$$
$$= f \circledast h(t)$$

Observar que es una operación conmutativa

1.3.1 Identidad en la convolución

Se cumple si $f \circledast \delta(x) = f(x)$

Delta de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x - x_0)\, dx = f(x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1 \text{ Normalización}$$

Identidad en versión vectorial

$$I\, \vec{x} = \vec{x} \qquad \text{con } I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

1.3.2 Respuesta al impulso

$$h \circledast \delta(x) = h(x)$$
$$\mathcal{H}\{\delta(x)\} = h(x)$$

1.4 Causalidad

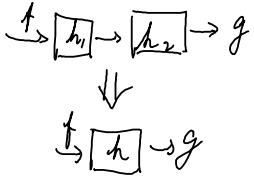
Una señal es causal si $f(t) = 0$ para $t < 0$

Un sistema es causal si al ser alimentado por una señal causal, la salida es causal

o sea si $f(t) = 0$ para $t < t_0$, entonces $g(t) = 0$, para $t < t_0$

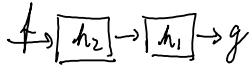
1.5 Asociatividad (bloques)

$$g(x) = h_2 \circledast h_1 \circledast f(x)$$
$$= h_2 \circledast (h_1 \circledast f)(x)$$
$$= (h_2 \circledast h_1) \circledast f(x)$$
$$= h \circledast f(x)$$



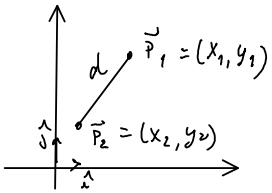
$$h(x) = h_2 \circledast h_1$$
$$= h_1 \circledast h_2$$

El orden de los sistemas se puede intercambiar

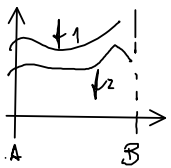


1.6 Álgebra lineal en espacios continuos

Espacio euclidiano



Espacio de funciones



Métrica L_2

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \qquad d^2 = \frac{1}{B-A}\int_A^B \left(f_1(x) - f_2(x)\right)^2 dx$$

$$d^2 = \langle f_1 - f_2, f_1 - f_2 \rangle = \|f_1 - f_2\|^2$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{\langle \vec{P}_1 - \vec{P}_2, \vec{P}_1 - \vec{P}_2 \rangle} = \|\vec{P}_1 - \vec{P}_2\|_{L_2} \qquad d = \sqrt{\frac{1}{B-A}\int_A^B (f_1(x) - f_2(x))^2 dx}$$

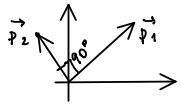
$$= \sqrt{\langle f_1 - f_2, f_1 - f_2 \rangle} = \|f_1 - f_2\|_{L_2}$$

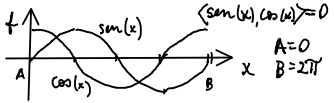
Producto interno (punto)

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = \langle \vec{P}_1, \vec{P}_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 \qquad \langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{B-A}\int_A^B f_1(x) f_2^*(x)\, dx$$

Si $\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = 0 \Rightarrow \vec{P}_1 \perp \vec{P}_2$ Si $\langle f_1, f_2 \rangle = 0 \Rightarrow f_1 \perp f_2$

Ortogonalidad





Ejemplo:

funciones exponenciales de frecuencias de múltiplo w_0

$A = 0$, $B = \frac{2\pi}{w_0}$ $\qquad \langle e^{jnw_0 t}, e^{jmw_0 t} \rangle = \delta[n-m]$

con $\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$, $n \in \mathbb{Z}$, Delta de Kronecker

Se puede generar el espacio $\{ e^{jnw_0 t} \}$ con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$, $j = \sqrt{-1}$

Cuando $x(t) \in$ espacio de función periódica en tiempo t

La serie de Fourier $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{jnw_0 t}$

1.7 Valores y Vectores Propios

se tiene una transformación lineal H

$H\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$ $\quad \lambda_i$: valor propio $\quad \vec{x}_i$: vector propio $\quad i = 1..n$

Si $H_{n \times n} \Rightarrow \vec{x}_i, \lambda_i, i = 1..n$

Si H es un operador diferencial $Hx(t) = \lambda x(t)$

$H \equiv a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial}{\partial t} + a_0$ Operador de 2o orden, coeficientes constantes

Al usar la función $x(t) = e^{\alpha t}$ función propia

$0 = a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0$ valores propios, (α_+, α_-) Obtenidos de resolver el sistema cuadrático

Usando las restricción de función causal, $\alpha < 0$