

CC4102 - Diseño y Análisis de Algoritmos

Auxiliar 7

Prof. Gonzalo Navarro; Aux. Mauricio Quezada

26 de Diciembre, 2011

1 El problema de los k servidores

Considere el escenario donde tiene k puntos (*servidores*) en un *espacio métrico* (donde está definida una función de distancia d : simétrica, no-negativa y que cumple la desigualdad triangular) y una secuencia de puntos (*peticiones*) que debe atender. Cada vez que llega una petición, un servidor debe moverse hacia esa posición.

El problema *online* consiste en minimizar la distancia recorrida por todos los servidores luego de n peticiones, sin saber la secuencia de puntos a atender.

Recuerde que un algoritmo *online* ALG es r -competitivo si existe una constante a tal que para cualquier instancia I y el algoritmo óptimo OPT ,

$$\text{cost}_{ALG}(I) \leq r \cdot \text{cost}_{OPT}(I) + a$$

Donde r es el *radio competitivo*.

1. Sea ALG un algoritmo online para el problema de los k servidores bajo un espacio métrico arbitrario con al menos $k + 1$ puntos. Pruebe que el radio competitivo de ALG es al menos k .
2. Para el siguiente análisis competitivo, necesitamos usar una conocida herramienta, la función potencial. Una función Φ es una función de potencial que demuestra un radio competitivo r de un algoritmo ALG si satisface las siguientes condiciones:
 - Φ es nonegativa
 - Cada respuesta a una petición a OPT incrementa Φ no más de r veces el costo cargado a OPT por esa respuesta.
 - Cada respuesta a una petición a ALG disminuye el potencial por al menos el costo cargado a ALG por esa respuesta.

Por lo que, un algoritmo es r -competitivo, si existe una función de potencial Φ para $r > 0$ que cumple las propiedades anteriores.

Considere el problema de k servidores en una línea (un espacio de dimensión 1) y el siguiente algoritmo:

- Si todos los servidores están a un lado de la petición, entonces envía el servidor más cercano a ella.

- Si una petición se encuentra entre dos servidores, envía los dos servidores a velocidad constante, y se detienen cuando uno de ellos llega a su objetivo.

Finalmente, de una función de potencial Φ que demuestre un radio competitivo de k para este algoritmo.

2 Buscando la casa

De repente, usted despierta en medio de una carretera desierta y no sabe dónde está. Además tiene sed y dolor de cabeza, y no recuerda cómo llegó ahí. Lo único que sabe es que su casa está en algún lugar de la carretera, pero no sabe en cuál dirección ir. Además, debido al sol y al dolor de cabeza no puede ver bien y sólo se daría cuenta de que está en el lugar correcto una vez estando ahí.

Para facilitarle las cosas, suponga que la carretera es una recta infinita y que usted está en $x = 0$ y que su casa está en x^* , con $|x^*| > 1$.

1. De un algoritmo determinista para encontrar el punto x^* que sea 9-competitivo.
2. De un algoritmo aleatorizado basado en su estrategia anterior, y calcule el radio competitivo.