



Auxiliar n°1

Viscosidad y Ley de Newton

Viernes 18 de Marzo de 2011

- Repaso

- Viscosidad:

Es el grado de oposición de un fluido a ponerse en movimiento o fluir. Si el fluido es Newtoniano, responde a la siguiente Ley conocida, como ley de Newton o Newton-Navier:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

En donde, μ es conocido como coeficiente de viscosidad cinemática, v_x es la velocidad del fluido en la dirección $\hat{x}$ y τ_{yx} es el esfuerzo de corte en el plano $\hat{y}\hat{x}$.

El porqué de esta relación, proviene del estudio de esfuerzos de corte τ_0 en fluidos y su relación con la "deformación angular" γ percibida por un volumen de control, estudio conocido a grandes rasgos como geología. En sólidos, esta definición tiene sentido, pero en fluidos pierde sentido, ya que éstos se deforman continuamente ante esfuerzos de corte. Por lo tanto, es más útil estudiar la relación entre esfuerzo de corte y la tasa de deformación angular de un volumen de control en el tiempo, definida como:

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$$

Dependiendo de la forma de esta relación, podemos clasificar los fluidos en Newtonianos y no Newtonianos (plásticos, pseudo-plásticos y dilatantes).

- Fluidos Newtonianos

El esfuerzo de corte es directamente proporcional a la tasa de deformación, luego:

$$\tau = \mu \dot{\gamma}$$

Al considerar un volumen de fluido con velocidad relativa entre las caras superior n e inferior s (ver figura). El movimiento relativo entre dichas caras es lo que da lugar a la deformación angular. Si llamamos $u = u_s$ a la velocidad en s , entonces podemos expresar la velocidad en n , u_n a partir de una expansión de Taylor con respecto a aquella en la cara s , considerando sólo el término de primer orden, dado que dy es pequeño, tal que:

$$u_n = u_s + \left. \frac{du}{dy} \right|_s dy + \dots$$

Ahora, si consideramos un volumen de control en $t = 0$ con $\gamma = 0$, podemos calcular $\Delta\gamma$ para un tiempo Δt , pequeño, como:

$$\tan \Delta\gamma \approx \Delta\gamma = \frac{u_n \Delta t - u_s \Delta t}{dy} = \left. \frac{du}{dy} \right|_s \Delta t$$

entonces, si $\Delta t \rightarrow 0$, se obtiene que:

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}$$

$$\Rightarrow \tau = \mu \frac{du}{dy}$$

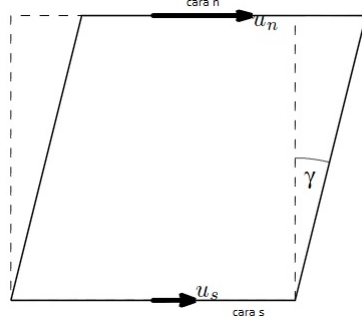


Figura 1: Esquema de deformación angular de volumen de control.

Ahora, si consideramos en esta última relación que μ y además, sabiendo que por un tema de balance de esfuerzos internos, τ es constante e igual al esfuerzo de corte ejercido en la superficie τ_0 , entonces se obtiene:

$$u(y) = \frac{\tau_0}{\mu} y + C_0$$

Donde, C_0 es una constante de integración, definido por la condición de borde del problema. Por ejemplo, si es el caso de placas planas paralelas, entonces, $u = 0$ en $y = 0$ y, por lo tanto, $C_0 = 0$. Luego, la velocidad de desplazamiento de la placa superficial queda:

$$U = \frac{\tau_0}{\mu} \epsilon$$

Generalmente, este valor de μ depende de otros factores como son la temperatura, la presión o la concentración, entre otros presentes en el fluido analizado. Se mide en unidades llamadas Centipoise (cp), en donde:

$$1[cp] = 10^{-2} [poise] = 10^{-2} [gr/(cm \cdot s)] = 10^{-3} [Pa \cdot s]$$

La viscosidad del Agua a $20[^\circ C]$ es de $1[cp]$. Hay que tener en cuenta que esta característica, aumenta en gases con la temperatura y, disminuye en líquidos al aumentar ésta.

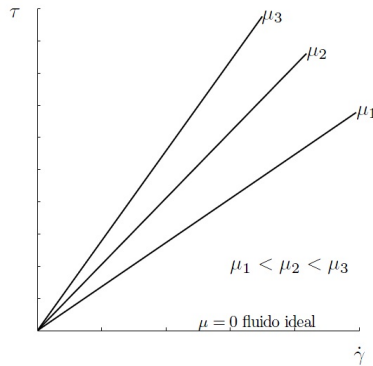


Figura 2: Diagrama reológico para fluidos Newtonianos.

También, muchas veces se considera, la denominada **Viscosidad Cinemática** ν :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

En donde, μ es la viscosidad normal y, ρ la densidad del fluido.

- **Fluidos No-Newtonianos: plásticos, pseudo-plásticos y dilatantes**

Tanto los fluidos **plásticos** como **pseudo-plásticos** se caracterizan por el hecho que para esfuerzos de corte inferiores a un cierto límite, la tasa de deformación es muy pequeña (en el caso de los pseudo-plásticos) o simplemente nula (en el caso de los plásticos). Este valor límite o crítico del esfuerzo de corte se denomina esfuerzo de fluencia, τ_c , tal que para $\tau_0 < \tau_c$, el fluido se comporta como un sólido mientras que para $\tau_0 > \tau_c$ el fluido se comporta como tal, con una tasa de deformación angular que aumenta con el valor de τ_0 . El denominado fluido **plástico-ideal o plástico de Bingham** tiene un esfuerzo de fluencia τ_c tal que para esfuerzos de corte bajo el cual no existe deformación y para esfuerzos de corte sobre aquel el fluido se comporta linealmente, es decir como un fluido Newtoniano. La reología de un fluido **plástico de Bingham** lo podemos representar, por lo tanto, como:

$$\tau = \tau_c + \mu \dot{\gamma} = \tau_c + \mu \frac{du}{dy}$$

Para los fluidos **pseudo-plásticos o plásticos reales**, la tasa de deformación aumenta a medida que aumentamos el esfuerzo de corte, y son posibles de modelar como:

$$\tau = \kappa (\dot{\gamma})^n = \kappa \left(\frac{du}{dy} \right)^n$$

Donde, $n < 1$ y κ son constantes características del fluido. Esto se puede interpretar como que estos fluidos se vuelven menos viscosos a medida que aumenta el esfuerzo de corte.

Los **fluidos dilatantes**, por otro lado, se vuelven más viscosos y, por lo tanto, tienden a deformarse más lentamente a medida que aumenta el esfuerzo de corte. Al igual que para un fluido pseudo-plástico, la relación entre esfuerzo de corte y tasa de deformación angular para un fluido dilatante se puede modelar como:

$$\tau = \kappa (\dot{\gamma})^n = \kappa \left(\frac{du}{dy} \right)^n$$

donde n y κ son también constantes características del fluido, pero en este caso $n > 1$.

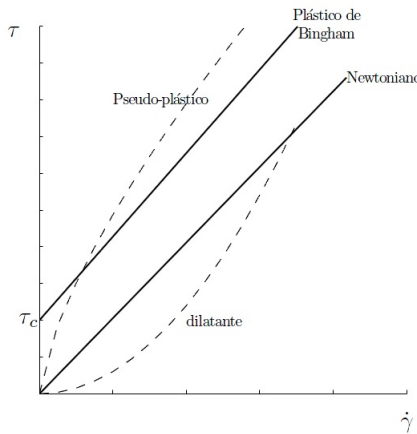


Figura 3: Diagrama reológico para fluidos No-Newtonianos.

Finalmente, si resolvemos el problema de las placas planas paralelas para cada uno de estos fluidos, se obtiene que para un **plástico de Bingham** no existe movimiento del fluido si $\tau < \tau_c$. Por el contrario, si $\tau > \tau_c$ entonces el fluido entre placas se comporta como un fluido Newtoniano, aunque la velocidad de la placa superficial U es ahora igual a:

$$U = \frac{\tau - \tau_c}{\mu} \epsilon$$

Para **fluidos pseudo-plásticos o dilatantes**, se cumple que el perfil de velocidades $u(y)$ es lineal, al igual que para el caso de fluido Newtoniano y plástico de Bingham, donde:

$$u(y) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{1/n} y$$

Ahora, la importancia radica en encontrar el valor de μ :

- **Método Teórico**

Consiste en despajar directamente la Ley de Newton de viscosidad, suponiendo una serie de características para el fluido en tratamiento. Se puede complicar el tratamiento de este método si el problema en cuestión es mayor a una dimensión (mas adelante veremos cómo abordar estos problemas).

- **Método Grafico**

Usualmente empleado en fluidos que no responden a la Ley de Newton. Consiste en obtener los valores de T_r , P_r y μ_r , es decir, de la temperatura, presión y viscosidad reducida directamente desde graficos empíricos, en donde se contrastan estos valores con los de T_c , P_c y μ_c , osea, de la temperatura, presión y viscosidad crítica, también obtenidos empíricamente. Luego, solo se aplica la siguiente relación:

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_c$$

- **Métodos Empíricos**

Son los más usados para cualquier tipo de fluidos, ya sean puros o una mezcla de ellos. Responden a ecuaciones como las mostradas a continuación:

- **Para gases no polares a bajas presiones, ecuación de Chapman & Enskog**

$$\mu_i = 2,6693 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{M_i \cdot T}}{\sigma_i^2 \cdot \Omega_{\mu_i}}$$

Dónde :

- $\mu_i [\frac{gr}{cm \cdot s}]$: Coeficiente de viscosidad de la sustancia i .
- $M_i [\frac{gr}{mol}]$: Peso molecular de la sustancia i .
- $T [^\circ K]$: Temperatura.
- $\sigma_i [Å]$: Parámetro de Lennard-Jones para la sustancia i .
- Ω_{μ_i} : Integral de colisión, para la viscosidad de la sustancia i . Se obtiene de la relación $T/(\epsilon/\kappa)_i$ para cada sustancia.
- **Para gases a baja densidad:**

$$\mu_c = 61,6 \frac{\sqrt{M_i \cdot T_c}}{V_c^{2/3}}$$

Dónde :

- $V_c [\frac{cm^3}{g-mol}]$: Volumen crítico de la sustancia i .
- $T_c [^\circ K]$: Temperatura critica de la sustancia i .
- **Para líquidos moleculares (No es válido para metales fundidos):**

$$\mu = A \cdot \exp\left(\frac{\Delta G_{vis}^\circ}{RT}\right) ; A \cong \frac{N_0 h}{V} ; \Delta G^\circ \cong 0,41 \Delta E_{vap}$$

- Para una mezcla de gases, ecuación de Wilke

$$\mu_{mezcla} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i \cdot \mu_i}{\sum_{j=1}^n x_j \cdot \Phi_{ij}}$$

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{M_i}{M_j} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M_j}{M_i} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^2$$

Donde :

- $\mu_{mezcla} [\frac{gr}{cm \cdot s}]$: Viscosidad de la mezcla de gases.
- $x_{i,j}$: Fracciones molares de las sustancias.
- Φ_{ij} : Adimensional, función de las sustancias presentes en la mezcla.
- $M_{i,j} [\frac{gr}{mol}]$: Pesos moleculares de las sustancias.
- $\mu_{i,j} [\frac{gr}{cm \cdot s}]$: Coeficientes de viscosidad de las sustancias.

- Para metales fundidos y aleaciones (Chapman):

$$\mu^*(V^*)^2 = f(T^*) ; \mu^* = \frac{\mu \delta^2 N_0}{\sqrt{MRT}} ; T^* = \frac{\kappa_B T}{\epsilon} ; V^* = \frac{1}{n \delta^3}$$

Donde :

- μ^* , T^* y V^* : Viscosidad, temperatura y volumen reducidos.
- $\delta [\text{\AA}]$: Distancia interatómica en el paquete cristalino a $0[^\circ K]$.
- ϵ : Parámetro energético característico específico del metal.
- N_0 : Número de Avogadro.
- R : Constante de los gases ideales.
- $T[^\circ K]$: Temperatura.
- κ_B : Constante de Boltzmann.
- n : Numero de átomos por unidad de volumen.

Se tiene la siguiente relación que permite estimar la viscosidad, para metales con altos puntos de fusión:

$$\frac{\epsilon}{\kappa_B} = 5,20 \cdot T_m$$

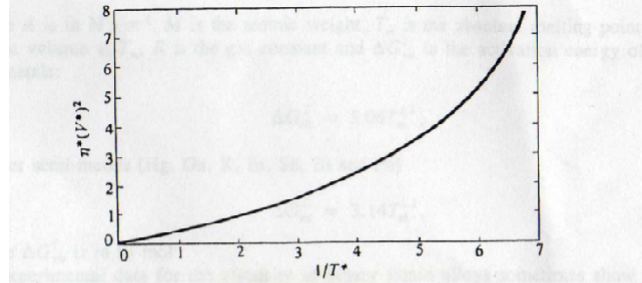


Fig. 1.10 Correlation curve for viscosities of liquid metals. (From Chapman, *ibid.*)

Table 1.4 Empirically determined values of ϵ/κ_B (from Chapman, *ibid.*)

Metals	δ , $\text{\AA}$	ϵ/κ_B , K	Metals	δ , $\text{\AA}$	ϵ/κ_B , K
Na	3.84	1970	Rb	5.04	1600
K	4.76	1760	Ag	2.88	6400
Li	3.14	2350	Cd	3.04	3300
Mg	3.20	4300	In	3.14	2500
Al	2.86	4250	Sn	3.16	2650
Ca	4.02	5250	Cs	5.40	1550
Fe	2.52	10 900	Au	2.88	6750
Co	2.32	9550	Hg	3.10	1250
Ni	2.50	9750	Pb	3.50	2800
Cu	2.56	6600	Pu	3.10	5550
Zn	2.74	4700			



Auxiliar n°1

Viscosidad y Ley de Newton

Viernes 18 de Marzo de 2011

• Problema N°1

Calcular la viscosidad del dióxido de azufre SO_2 , gas resultante del tratamiento pirometalúrgico de calcosina Cu_2S . Si se sabe que el gas sale del horno a $80[^\circ C]$ con una presión de $700[atm]$. Por otro lado, se conoce que su presión, temperatura y viscosidad críticas son $P_c = 77,8[atm]$, $T_c = 430,7[^\circ K]$ y $\mu_c = 411 \times 10^6[gr/(cm \cdot s)]$.

• Problema N°2

Para probar el buen funcionamiento de una cañería de diámetro $1[m]$, con una inclinación de 30° sobre la horizontal en una planta de relave, es que se hace deslizar un cilindro compacto de largo $1[m]$, $0,98[m]$ de diámetro, con $5[kg/m^3]$ de densidad y, un coeficiente de fricción constante, calculado en $0,4$. Por requerimientos de la empresa, se necesita que el cilindro avance a una velocidad constante que no sea menor a los $200[m/s]$, y además, que se mantenga estable sin rotar sobre su propio eje. Para este fin, se lubricará el interior de la cañería con algún fluido que rellene el espacio restante entre ambos. Su labor, como experto en viscosidad, es determinar la viscosidad necesaria del fluido a utilizar para cumplir los requerimientos de la empresa.

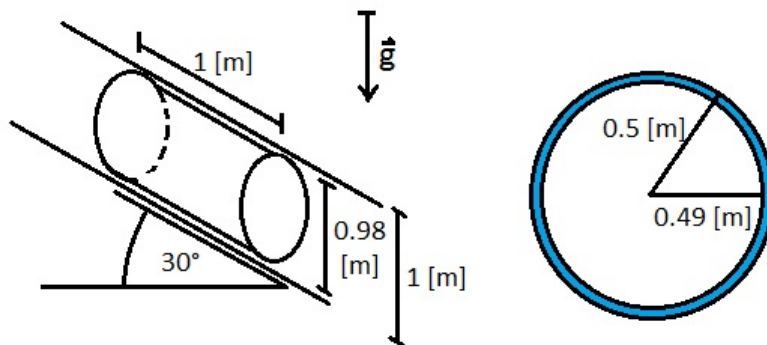


Figura 4: Sistema a estudiar y vista transversal cilindros concéntricos.

• Problema N°3

A Usted, como científico de un prestigioso laboratorio, le encargan calcular la viscosidad para el aire a $100[^\circ C]$. Para ello, su equipo de trabajo le ha informado que, según su última investigación, éste actualmente está compuesto por 78 % de N_2 , 21 % de O_2 y 1 % de Ar .

• Problema N°4 - Parte (a) y (b), Problema N°1 Control 1, Primavera 2010

- (a) Determinar la $\mu_{Cu-40\%Zn}$ en $[cP]$ de una aleación $Cu - 40\%Zn$ a partir de las viscosidades parciales de sus metales fundidos a una T° de $1100[^\circ C]$.
- (b) Se sabe que para la aleación descrita en (a) $\mu_{1000[^\circ C]} = 5[cP]$ mientras que $\mu_{950[^\circ C]} = 6[cP]$. Determine de forma directa $\mu_{1100[^\circ C]}$. Compare y discuta con aquel obtenido en (a).

Datos:

- Cu : $T_m = 1084[^\circ C]$; $\rho = 8[gr/cc]$; $M = 63,5[gr/mol]$; $\delta = 0,256[nm]$.
- Zn : $T_m = 420[^\circ C]$; $\rho = 6,6[gr/cc]$; $M = 65,4[gr/mol]$; $\delta = 0,274[nm]$.
- $R = 8,3144[J/(mol \cdot ^\circ K)]$
- $N_0 = 6,023 \times 10^{23}[1/mol]$

$$\frac{\epsilon}{\kappa_B} = 5,2 \cdot T_m ; [^\circ K]$$

$$\mu = A \cdot e^{\left(\frac{\Delta G}{RT}\right)} ; \mu^* = \frac{\mu \delta^2 N_0}{\sqrt{MRT}} ; T^* = \frac{\kappa_B}{\epsilon} ; V^* = \frac{1}{n\delta^3}$$

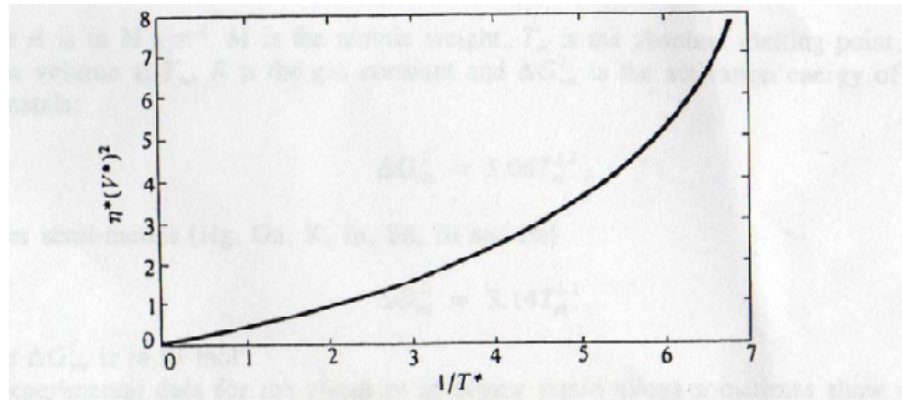


Fig. 1.10 Correlation curve for viscosities of liquid metals. (From Chapman, *ibid.*)

Table 1.4 Empirically determined values of ϵ/κ_B (from Chapman, *ibid.*)

Metals	$\delta, \text{\AA}$	$\epsilon/\kappa_B, K$	Metals	$\delta, \text{\AA}$	$\epsilon/\kappa_B, K$
Na	3.84	1970	Rb	5.04	1600
K	4.76	1760	Ag	2.88	6400
Li	3.14	2350	Cd	3.04	3300
Mg	3.20	4300	In	3.14	2500
Al	2.86	4250	Sn	3.16	2650
Ca	4.02	5250	Cs	5.40	1550
Fe	2.52	10 900	Au	2.88	6750
Co	2.32	9550	Hg	3.10	1250
Ni	2.50	9750	Pb	3.50	2800
Cu	2.56	6600	Pu	3.10	5550
Zn	2.74	4700			

• **Problema N°5 (Propuesto)**

En una conocida minera ubicada en la región de Antofagasta, se tiene un estanque muy grande con fluidos derivados de tratamientos metalúrgicos de distinta reología, dispuestos en capas, tal como se muestra en la figura. Suponga que el estanque posee n diferentes capas de fluidos con espesores y viscosidades dinámicas h_i y μ_i respectivamente, con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Además, suponga que la reología del sistema pertenece a un fluido plástico. La instalación experimental busca analizar el efecto del viento en la columna vertical de fluidos; para esto, se coloca un túnel de viento sobre el estanque.

El esfuerzo de corte que ejerce el viento sobre la superficie libre es proporcional al producto entre la densidad del aire y la velocidad del viento al cuadrado, con un coeficiente de proporcionalidad C_d :

$$\tau_s = C_d \rho_a V_w^2$$

donde τ_s denota el esfuerzo de corte sobre la superficie del agua, C_d es una constante de proporcionalidad (coeficiente de arrastre), ρ_a es la densidad del aire, y V_w es la velocidad del viento sobre la superficie.

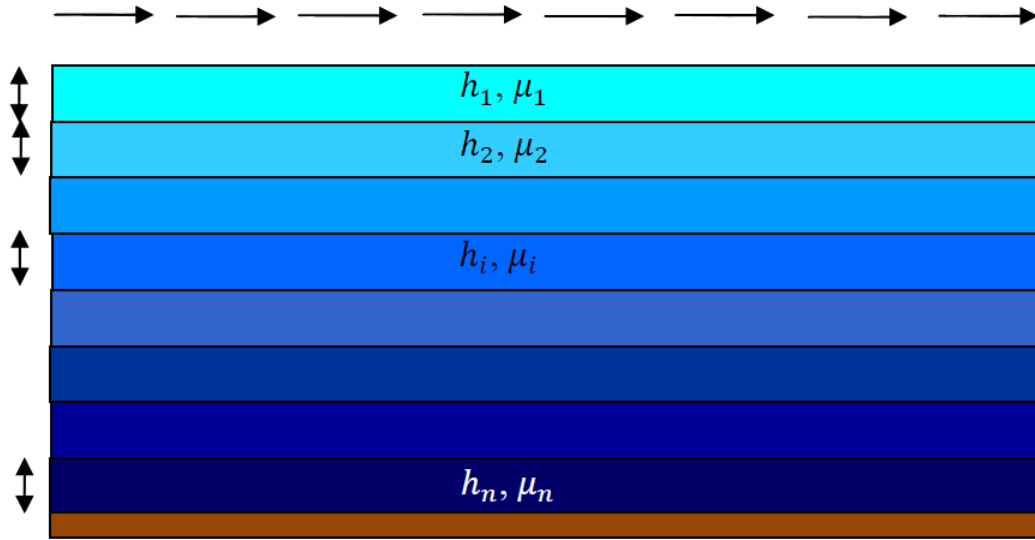
Se pide:

- (a) Plantear una ecuación para la distribución de velocidad de la capa i -ésima en el estanque. Indicar la condición que debe cumplirse en la interfaz entre capas.
- (b) Obtener el perfil de velocidades para la capa 1.
- (c) Suponiendo que el estanque posee una estratificación compuesta por dos capas, obtener el perfil de velocidades de la columna compuesta, suponiendo un fluido newtoniano en la capa superficial y un fluido plástico en la capa inferior.
- (d) Para el caso anterior, calcular la velocidad del fluido de la primera capa.

Indicaciones:

- El esfuerzo de corte del viento τ_s es constante sobre la superficie de fluido.
- No hay velocidad en el fondo del estanque.
- Los fluidos son inmiscibles (no se mezclan).
- La reología de un fluido plástico corresponde a la siguiente ecuación, con $m = 1$. En un fluido Newtoniano, $m = 1$ y $\tau_{0i} = 0$.

$$\tau_i = \mu_i \|\dot{\gamma}_i\|^{m-1} \dot{\gamma}_i + \tau_{0i}$$



Fondo fijo

Figura N°2: Estanque estratificado en n capas.

Parámetros	Magnitud	Dimensiones
C_D	0.0013	-
ρ_a	1.2	kg/m ³
V_w	2.5	m/s
h_1	0.01	m
h_2	0.03	m
μ_1	1.1	cP
μ_2	35	cP
τ_{02}	0.007	N/m ²
m	1	-

Tabla N°1: Parámetros del problema

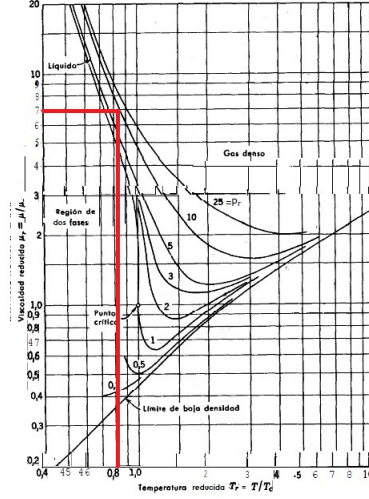
- **Solución Problema N°1**

Primero calculamos los factores T_r y P_r , entonces:

$$T_r = \frac{T}{T_c} = \frac{353,15[^\circ K]}{430,7[^\circ K]} \approx 0,82$$

$$P_r = \frac{P}{P_c} = \frac{700[atm]}{77,8[atm]} \approx 9$$

Luego, evaluamos estos valores en el grafico μ_r v/s T_r , para distintos valores de P_r y obtenemos:

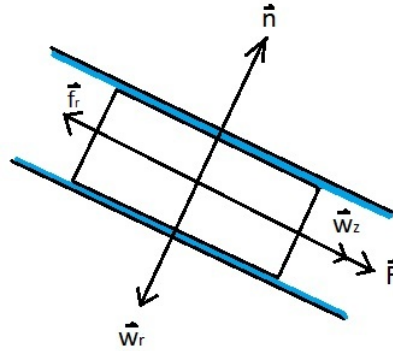


$$\mu_r \approx 7$$

$$\Rightarrow \mu = \mu_r \cdot \mu_c = 7 \cdot 411 \times 10^6 [gr/(cm \cdot s)] = 2877 \times 10^6 [gr/(cm \cdot s)]$$

- **Solución Problema N°2**

Primero hacemos un D.C.L. del sistema, obteniendo:



En donde:

$$\vec{W}_z = \rho V g \sin(30^\circ)$$

$$\vec{W}_r = \rho V g \cos(30^\circ)$$

Son las componentes del peso del cilindro, $\vec{f}_r$ es la fuerza de fricción, $\vec{n}$ es la normal, $\vec{F}$ es la fuerza de corte efectiva que siente el cilindro sobre el fluido y, V es el volumen del cilindro. Luego, como el sistema no está acelerado, entonces:

$$\sum_i \vec{F}_{zi} = \vec{F} + \vec{W}_z - \vec{f}_r = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{f}_r - \vec{W}_z = \vec{f}_r - \rho V g \sin(30^\circ) = \vec{f}_r - \rho \pi r^2 l g \sin(30^\circ) \quad (1)$$

y,

$$\sum_i \vec{F}_{ri} = \vec{n} - \vec{W}_r = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \vec{W}_r = \rho V g \cos(30^\circ) = \rho \pi r^2 l g \cos(30^\circ) \quad (2)$$

Donde, r es el radio del cilindro y l el largo de éste.

Ahora, notando que el cilindro no gira en su propio eje, entonces, solo se tiene movimiento de fluido en el plano $\hat{r}\hat{z}$, y no en otros planos, donde la velocidad es constante. Pero, hay que tener en cuenta que no es el fluido el que se mueve por sí solo, sino que se mueve a causa del desplazamiento del cilindro interno (diferencia que quedara más clara con el paso de las clases). Por lo anterior, podemos tratar este problema al igual que el de placas paralelas visto en clases, entonces tenemos:

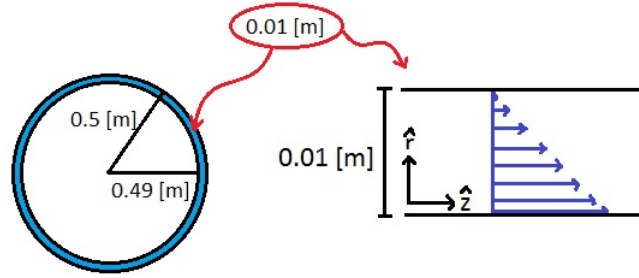


Figura 5: Vista transversal y longitudinal del film de fluido.

Ahora, recordando que:

$$\vec{f}_r = \tilde{\mu} \vec{n}$$

Entonces, reemplazando (2) en la anterior, y ésta en (1), obtenemos:

$$\vec{F} = \tilde{\mu} \rho \pi r^2 l g \cos(30^\circ) - \rho \pi r^2 l g \sin(30^\circ) \quad (3)$$

Ahora que ya tenemos la fuerza de corte, recurrimos a la ecuación de viscosidad de Newton:

$$\tau_{rz} = \frac{\vec{F}}{A} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \approx -\mu \frac{\Delta v_z}{\Delta r} \quad (4)$$

Donde, τ_{rz} es el esfuerzo de corte percibido por el cilindro y, A es el área de contacto del cilindro con el fluido.

Ahora, reemplazando (3) en (4), y aplicando los requerimientos de la empresa, obtenemos:

$$\frac{\tilde{\mu} \rho \pi r^2 l g \cos(30^\circ) - \rho \pi r^2 l g \sin(30^\circ)}{2 \pi r l} = -\mu \frac{\Delta v_z}{\Delta r}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta r (-\tilde{\mu} \rho \pi r^2 l g \cos(30^\circ) + \rho \pi r^2 l g \sin(30^\circ))}{2 \mu \pi r l} = \Delta v_z \geq 200 [m/s]$$

Entonces, reemplazando los valores numéricamente y despejando μ de la desigualdad, obtenemos:

$$\frac{0,01[m] \cdot 5[kg/m^3] \cdot 0,49[m] \cdot 9,8[m/s^2] \cdot (-0,4 \cdot \cos(30^\circ) + \sin(30^\circ))}{2 \cdot 200[m/s]} \geq \mu$$

$$\Rightarrow \mu \leq 0,000092[Pa \cdot s] = 0,092[cp]$$

Luego, un fluido como el aire a $1[atm]$ de presión y, en el intervalo de $0[^\circ C]$ a $100[^\circ C]$ funcionaria bien para el propósito requerido ($0,017[cp]$ a $0,021[cp]$).

• Solución Problema N°3

Primero calculamos las viscosidades de cada sustancia, por medio de la ecuación para gases no polares a bajas presiones (ecuación de Chapman & Enskog):

$$\mu_i = 2,6693 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{M_i \cdot T}}{\sigma_i^2 \cdot \Omega_{\mu_i}}$$

Usando los datos de las tablas encontradas en el apéndice del **Bird**, se obtiene para cada sustancia:

◦ μ_{O_2} :

$$\begin{aligned} \sigma &= 3,433 \\ (\epsilon/\kappa) &= 113 \Rightarrow \frac{\kappa T}{\epsilon} = 3,3 \Rightarrow \Omega \approx 1,014 \\ \Rightarrow \mu_{O_2} &= 2,6693 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{32 \cdot 373,15}}{3,433^2 \cdot 1,014} \\ \Rightarrow \mu_{O_2} &= 2,44 \times 10^{-4}[poise] \end{aligned}$$

◦ μ_{N_2} :

$$\begin{aligned} \sigma &= 3,681 \\ (\epsilon/\kappa) &= 91,5 \Rightarrow \frac{\kappa T}{\epsilon} = 4,076 \Rightarrow \Omega \approx 0,966 \\ \Rightarrow \mu_{N_2} &= 2,6693 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{28 \cdot 373,15}}{3,681^2 \cdot 0,966} \\ \Rightarrow \mu_{N_2} &= 2,08 \times 10^{-4}[poise] \end{aligned}$$

◦ μ_{Ar} :

$$\begin{aligned} \sigma &= 3,418 \\ (\epsilon/\kappa) &= 124 \Rightarrow \frac{\kappa T}{\epsilon} = 3,008 \Rightarrow \Omega \approx 1,038 \\ \Rightarrow \mu_{Ar} &= 2,6693 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{39,9 \cdot 373,15}}{3,418^2 \cdot 1,038} \\ \Rightarrow \mu_{Ar} &= 2,69 \times 10^{-4}[poise] \end{aligned}$$

	Fracción Molar x_i	Peso Molecular $[gr/mol]$	Viscosidad $[poise]$
O_2	0.21	32	2.44×10^{-4}
N_2	0.78	28	2.08×10^{-4}
Ar	0.01	39.9	2.69×10^{-4}

Tabla 1: Tabla resumen para los gases de la mezcla.

Luego, con los datos anteriores, armamos la siguiente tabla de cálculo:

i	j	$\frac{M_i}{M_j}$	$\frac{\mu_i}{\mu_j}$	Φ_{ij}	$\sum_{j=1}^3 x_j \cdot \Phi_{ij}$
1 O_2	1 O_2	1	1	1	1.01069
	2 N_2	1.14	1.173	1.013	
	3 Ar	0.8	0.907	1.055	
2 N_2	1 O_2	0.875	0.852	0.986	0.99748
	2 N_2	1	1	1	
	3 Ar	0.7	0.773	1.042	
3 Ar	1 O_2	1.246	1.102	0.937	0.94465
	2 N_2	1.425	1.293	0.946	
	3 Ar	1	1	1	

Donde, Φ_{ij} es calculado por medio de la siguiente ecuación:

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{M_i}{M_j} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M_j}{M_i} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^2$$

Finalmente, ocupando la ecuación para una mezcla de gases (ecuación de Wilke):

$$\mu_{mezcla} = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i \cdot \mu_i}{\sum_{j=1}^3 x_j \cdot \Phi_{ij}} = \frac{0,21 \cdot 2,44 \times 10^{-4}}{1,01069} + \frac{0,78 \cdot 2,08 \times 10^{-4}}{0,99748} + \frac{0,01 \cdot 2,69 \times 10^{-4}}{0,94465}$$

$$\Rightarrow \mu_{mezcla} = \mu_{Aire} = 2,163 \times 10^{-4} [poise]$$

Así, el científico pudo cumplir con su misión.

- Nota: Pido disculpas por cualquier posible error en los cálculos (se los dejo a ustedes para que lo corroboren), lo importante en este caso era que aprendieran el método.

• **Solución Problema N°4 - Parte (a) y (b), Problema N°1 Control 1, Primavera 2010**

(a) Se pide determinar $\mu_{Cu-40\%Zn}$. Para ello, se determina por separado la viscosidad de ambos metales en estado líquido, y posteriormente se calcula la viscosidad de la aleación a $T = 1100[^\circ C]$.

o Viscosidad del Cu :

Debe calcularse la viscosidad del Cu a $1373[^\circ K]$.

Se conoce $T_m = 1084[^\circ C] = 1357[^\circ K]$, por lo tanto:

$$\frac{\epsilon}{\kappa_B} = 5,2 \cdot T_m \Rightarrow \frac{\epsilon}{\kappa_B} = 7056,4[^\circ K]$$

Luego,

$$T^* = \frac{\kappa_B}{\epsilon} \cdot T = \frac{1373[^\circ K]}{7056,4[^\circ K]}$$

$$\Rightarrow T^* = 0,19$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T^*} = 5,14$$

Con el resultado anterior se busca en el gráfico, obteniéndose $\mu^* \cdot (V^*)^2 = 3,8$.

A continuación, debe calcularse

$$V^* = \frac{1}{n \cdot \delta^3}$$

Se tiene

$$n = \rho \cdot \frac{N_0}{PA} = \frac{6,023 \times 10^{23}[1/mol] \cdot 8[g/cm^3]}{63,5[g/mol]}$$

$$\Rightarrow n = 7,59 \times 10^{22}[1/cm^3]$$

Para δ , deben ajustarse las unidades:

$$\delta = 0,256[nm] = 0,256 \times 10^{-9}[m] = 0,256 \times 10^{-7}[cm]$$

Por lo tanto:

$$V^* = \frac{1}{n \cdot \delta^3} = \frac{1}{7,59 \times 10^{22}[1/cm^3] \cdot (0,256 \times 10^{-7}[cm])^3}$$

$$\Rightarrow V^* = 0,79$$

Como se conoce $\mu^* \cdot (V^*)^2 = 3,8$

$$\Rightarrow \mu^* = 6,2$$

Con esto

$$\mu^* = \frac{\mu \cdot \delta^2 \cdot N_0}{\sqrt{M \cdot R \cdot T}} \Rightarrow \mu_{Cu} = \mu^* \cdot \frac{\sqrt{M \cdot R \cdot T}}{\delta^2 \cdot N_0}$$

Se tiene

$$\sqrt{M \cdot R \cdot T} = \sqrt{63,5[g/mol] \cdot 8,3144[J/(mol \cdot ^\circ K)] \cdot 1373[^\circ K]}$$

$$\sqrt{M \cdot R \cdot T} = \sqrt{63,5 \times 10^{-3} \cdot 8,3144 \cdot 1373[\frac{kg \cdot kg \cdot m^2}{mol \cdot mol \cdot s}]}$$

$$\Rightarrow \sqrt{M \cdot R \cdot T} = 26,9[kg/(mol \cdot s)]$$

Si no se transforma unidades, se obtiene

$$\sqrt{M \cdot R \cdot T} = 851,4[\sqrt{J \cdot g/mol}]$$

Finalmente,

$$\mu_{Cu} = \frac{6,2 \cdot 26,9[\frac{kg \cdot m}{mol \cdot s}]}{(0,256 \times 10^{-9}[m])^2 \cdot 6,023 \cdot 10^{23}[1/mol]}$$

$$\mu_{Cu} = 4,23 \times 10^{-3}[\frac{kg}{m \cdot s}] = 4,23[cP]$$

Así, se tiene

$$\mu_{Cu} = 4,23[cP]$$

Si se usa el valor sin transformación de unidades, se tiene $\mu_{Cu} = 0,134[\frac{\sqrt{J \cdot g}}{m^2}]$, y con los factores 10^{-3} y $10^{3/2}$ se obtiene el mismo resultado.

o Viscosidad del Zn :

Debe calcularse la viscosidad del Zn a $1373[^\circ K]$.

Se conoce $T_m = 420[^\circ C] = 693[^\circ K]$, por lo tanto:

$$\frac{\epsilon}{\kappa_B} = 5,2 \cdot T_m \Rightarrow \frac{\epsilon}{\kappa_B} = 3603,6[^\circ K]$$

Luego,

$$T^* = \frac{\kappa_B}{\epsilon} \cdot T = \frac{1373[^\circ K]}{3603,6[^\circ K]}$$

$$\Rightarrow T^* = 0,38$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T^*} = 2,63$$

Con el resultado anterior se busca en el gráfico, obteniéndose $\mu^* \cdot (V^*)^2 = 1,2$.

A continuación, debe calcularse

$$V^* = \frac{1}{n \cdot \delta^3}$$

Se tiene

$$n = \rho \cdot \frac{N_0}{PA} = \frac{6,023 \times 10^{23}[1/mol] \cdot 6,6[g/cm^3]}{65,4[g/mol]}$$

$$\Rightarrow n = 6,08 \times 10^{22}[1/cm^3]$$

Para δ , deben ajustarse las unidades:

$$\delta = 0,274[nm] = 0,274 \times 10^{-9}[m] = 0,274 \times 10^{-7}[cm]$$

Por lo tanto:

$$V^* = \frac{1}{n \cdot \delta^3} = \frac{1}{6,08 \times 10^{22}[1/cm^3] \cdot (0,274 \times 10^{-7}[cm])^3}$$

$$\Rightarrow V^* = 0,8$$

Como se conoce $\mu^* \cdot (V^*)^2 = 1,2$

$$\Rightarrow \mu^* = 1,875$$

Con esto

$$\mu^* = \frac{\mu \cdot \delta^2 \cdot N_0}{\sqrt{M \cdot R \cdot T}} \Rightarrow \mu_{Cu} = \mu^* \cdot \frac{\sqrt{M \cdot R \cdot T}}{\delta^2 \cdot N_0}$$

Se tiene

$$\sqrt{M \cdot R \cdot T} = \sqrt{65,4[g/mol] \cdot 8,3144[J/(mol \cdot ^\circ K)] \cdot 1373[^\circ K]}$$

$$\sqrt{M \cdot R \cdot T} = \sqrt{65,4 \times 10^{-3} \cdot 8,3144 \cdot 1373[\frac{kg \cdot kg \cdot m^2}{mol \cdot mol \cdot s}]}$$

$$\Rightarrow \sqrt{M \cdot R \cdot T} = 27,32[kg/(mol \cdot s)]$$

Si no se transforma unidades, se obtiene

$$\sqrt{M \cdot R \cdot T} = 864,1[\sqrt{J \cdot g/mol}]$$

Finalmente,

$$\mu_{Zn} = \frac{1,875 \cdot 27,32[\frac{kg \cdot m}{mol \cdot s}]}{(0,274 \times 10^{-9}[m])^2 \cdot 6,023 \cdot 10^{23}[1/mol]}$$

$$\mu_{Zn} = 1,13 \times 10^{-3}[\frac{kg}{m \cdot s}] = 1,13[cP]$$

Así, se tiene

$$\mu_{Zn} = 1,13[cP]$$

Si se usa el valor sin transformación de unidades, se tiene $\mu_{Zn} = 0,036[\frac{\sqrt{J \cdot g}}{m^2}]$, y con los factores 10^{-3} y $10^{3/2}$ se obtiene el mismo resultado.

Con los resultados anteriores, puede calcularse la viscosidad de la aleación usando:

$$\mu_{Cu-40\%Zn} = 0,6 \cdot \mu_{Cu} + 0,4 \cdot \mu_{Zn}$$

$$\Rightarrow \mu_{Cu-40\%Zn} = 2,99[cP]$$

- (b) Considerando que, para la aleación 60%Cu – 40%Zn, la viscosidad a 1000[°C] es 5[cP], y la viscosidad a 950[°C] es 6[cP], se pide calcular la viscosidad a 1100[°C].

Para encontrar la viscosidad a esa temperatura, debe usarse la ecuación de Arrhenius. Como se conoce el valor de la viscosidad a 2 temperaturas distintas, es posible plantear un sistema de dos ecuaciones, donde las incógnitas son las constantes de la ecuación, A y $\frac{\Delta G}{R}$.

La ecuación de Arrhenius es:

$$\mu_T = A \cdot \exp\left(\frac{\Delta G}{R \cdot T}\right)$$

Las temperaturas a las cuales se conoce la viscosidad son:

$$T = 1000[^\circ C] = 1273[^\circ K]$$

$$T = 950[^\circ C] = 1223[K]$$

Se tiene:

$$\mu_{1000[^\circ C]} = 5[cP] = A \cdot \exp\left(\frac{\Delta G}{R \cdot 1273[^\circ K]}\right)$$

$$\mu_{950[^\circ C]} = 6[cP] = A \cdot \exp\left(\frac{\Delta G}{R \cdot 1223[^\circ K]}\right)$$

Para simplificar, se aplica logaritmo natural a ambos lados de las ecuaciones:

$$\ln(5) = \ln(A) + \frac{\Delta G}{R \cdot 1273} \quad (5)$$

$$\ln(6) = \ln(A) + \frac{\Delta G}{R \cdot 1223} \quad (6)$$

Para resolver el sistema, restamos ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1) - (2) &\Rightarrow \ln(5) - \ln(6) = \frac{\Delta G}{R} \cdot \left(\frac{1}{1273} - \frac{1}{1223}\right) \\ &\Rightarrow \frac{\Delta G}{R} = \frac{-182,32 \times 10^{-3}}{-32,12 \times 10^{-6}} \\ &\Rightarrow \frac{\Delta G}{R} = 5676,21 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en (1):

$$\begin{aligned} \ln(A) &= \ln(5) - \frac{5676,21}{1273} \\ \ln(A) &= -2,85 / \exp() \\ A &= 5,78 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Como se conocen las dos constantes, puede calcularse la viscosidad a $1100[^\circ C]$, es decir, a $1373[K]$:

$$\begin{aligned} \mu_{1100[^\circ C]} &= A \cdot \exp\left(\frac{\Delta G}{R \cdot T}\right) \\ \mu_{1100[^\circ C]} &= 5,78 \times 10^{-2} \cdot \exp\left(\frac{5676,21}{1373}\right) \\ \mu_{1100[^\circ C]} &= 3,61[cP] \end{aligned}$$

Si se compara este resultado con el obtenido en (a):

$$Error = \frac{\mu_{Cu-40\%Zn}}{\mu_{1100[^\circ C]}} \cdot 100\% = 17\%$$

Existe un amplio margen de error entre ambas soluciones, con lo cual puede concluirse que el uso de la ecuación de Arrhenius entrega un resultado mucho más confiable que la aproximación de la viscosidad a partir de las viscosidades parciales de ambos metales.