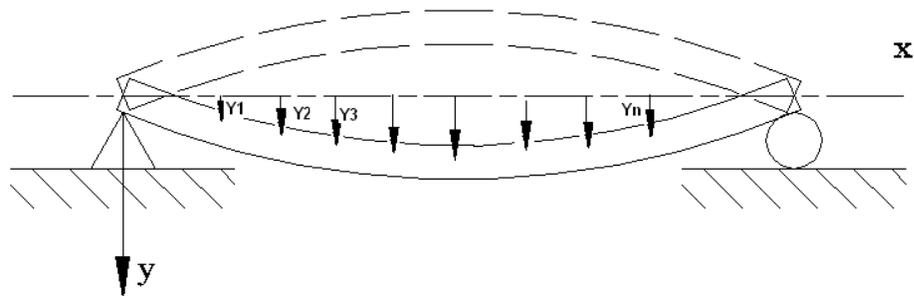


CAPITULO 5

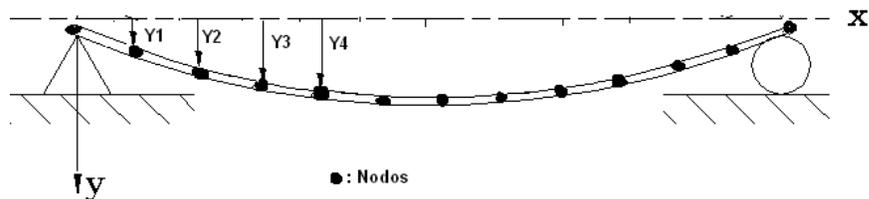
Métodos de cálculo numéricos

1. El método de los elementos finitos

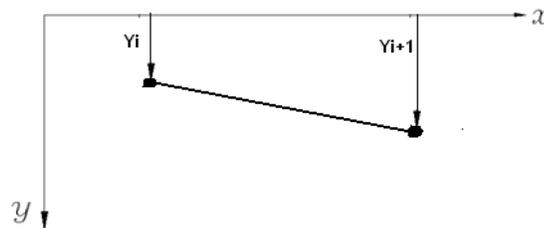
La modelación de un sistema mediante el método de los elementos finitos puede ser considerada ser una ampliación del método de los modos o formas de vibrar asumidos vistos en el capítulo 1. Un sistema continuo, como se ilustra en la figura 5.1 a), tiene infinitos grados



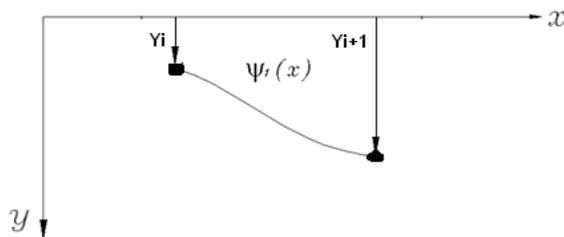
a) Sistema continuo, teóricamente de infinitos grados de libertad



b) Sistema considerado compuesto por una serie de elementos finitos



c) La forma más simple de variación del desplazamiento entre nodos: forma lineal.



d) Forma más real de variación del desplazamiento entre nodos: $\Psi(x)$

FIG. 5.1. Modelación de un sistema continuo en elementos finitos.

de libertad. Para conocer la forma de deformación exacta del sistema, es necesario conocer la posición $y_i(t)$ de cada punto (con $i= 1, 2, 3, \dots$ infinito).

Para disminuir el número de grados de libertad del sistema podemos dividirlo en un conjunto finito de elementos, los cuales son unidos o ensamblados en puntos llamados **nodos**, como se ilustra en figura 5.1 b). En los nodos se asegura la compatibilidad o continuidad al menos de los desplazamientos (los desplazamientos de los elementos que se unen en el nodo deben ser iguales).

La deformación en los distintos puntos del elemento se asume que tenga una forma dada, $\varphi_i(x)$, llamada **función de forma o de interpolación**. Esta función de forma podría ser lineal como se ilustra en figura 5.1 c) o tener otra forma que se acerque más a la forma real, como se ilustra en figura 5.1 d). Si se utiliza una función de forma lineal, para obtener una buena aproximación de la forma real de deformación del sistema se requeriría de muchos elementos. Al utilizar una forma de deformación más real, se requieren menor número de elementos.

1.1. Modelación de una viga vibrando en flexión.

La estructura se modela por un sistema de elementos finitos separados, los que son unidos por un número finito de nodos. Consideremos uno de estos elementos, como el mostrado en figura 5.2.

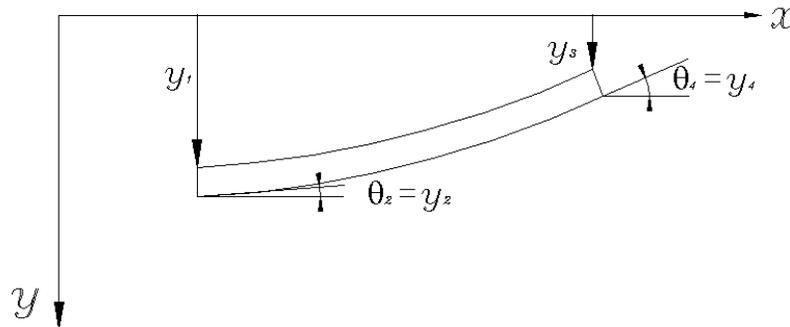


FIG. 5.2. Elemento finito de viga vibrando en flexión en un plano

Los desplazamientos de estos nodos son las coordenadas generalizadas que van a definir el movimiento del sistema. Para una viga vibrando en flexión en un plan, es necesario conocer el desplazamiento lineal y la pendiente del elemento en cada nodo.

Vamos a nombrar los desplazamientos de los nodos por números impares y las pendientes en ellos por números pares. Así, los desplazamientos lineales de los nodos del elemento se denominan y_1 e y_3 , y las pendientes en los nodos se denominan por $y_2 = \theta_2$ e $y_4 = \theta_4$, como se ilustra en figura 5.2.

El vector de desplazamientos del elemento será entonces:

$$\{q\}^T = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$$

1.1.1. Rigidez de un elemento de viga o de barra en flexión en un plano.

Para determinar la rigidez del elemento viga en flexión, debemos darnos una forma de deformación cualquiera que satisfaga las condiciones de continuidad interna y nodal. Si se utilizan las verdaderas funciones de forma o interpolación $\varphi_i(x)$ se obtienen las rigideces verdaderas.

La forma de deformación de una viga sobre la que actúan fuerzas y momentos es obtenida de la ecuación de la elástica:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) = \sum F_i x_i + \sum M_i$$

La elástica es en este caso una cúbica (obtenida al integrar) de la forma indicada en la ecuación (5-1).

La presencia de estos términos asegura:

$$y(x) = \underbrace{a}_{\text{Convergencia de } y} + \underbrace{bx}_{\text{Convergencia de } \frac{dy}{dx}} + \underbrace{cx^2}_{\text{Convergencia de } M=EI \frac{d^2 y}{dx^2}} + \underbrace{dx^3}_{\text{Convergencia de } V=EI \frac{d^3 y}{dx^3}} \quad (5-1)$$

Podemos expresar a , b , c , y d en función de los desplazamientos en los nodos: y_1 , y_2 , y_3 , e y_4 . Reemplazando en (5-1) que para $x=0$: $y=y_1$; $dy/dx = y_2$ y para $x=l$: $y=y_3$; $dy/dx = y_4$ de acuerdo a figura 5.3, se obtiene:

$$\begin{aligned} a &= y_1 \\ b &= y_2 \\ c &= 3 \left(\frac{y_3 - y_1}{l^2} \right) - \left(\frac{y_4 + 2y_2}{l} \right) \\ d &= 2 \left(\frac{y_1 - y_3}{l^3} \right) + \left(\frac{y_4 + y_2}{l^2} \right) \end{aligned}$$

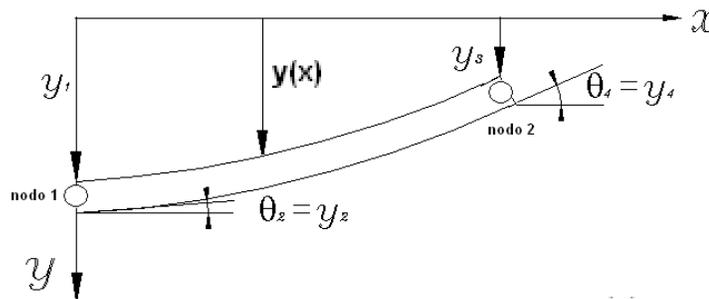


FIG. 5.3. Coordenadas en los nodos 1 y 2 del elemento finito

y por lo tanto:

$$y(x) = \underbrace{\left[1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]}_{\psi_1(x)} y_1 + \underbrace{x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2}_{\psi_2(x)} y_2 + \underbrace{\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]}_{\psi_3(x)} y_3 + \underbrace{\frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right)}_{\psi_4(x)} y_4 \quad (5-2)$$

Los $\psi_i(x)$ son funciones de ponderación o interpolación, que permiten determinar los desplazamientos en cualquier punto del elemento finito, conocido el valor del desplazamiento en sus nodos. De la ecuación (5-2) ve que $\psi_i(x)$ corresponde a $y(x)$ cuando $y_i=1$ y todos los otros *desplazamientos*, “y” son cero. Figura 5.3 muestra estas funciones de forma.

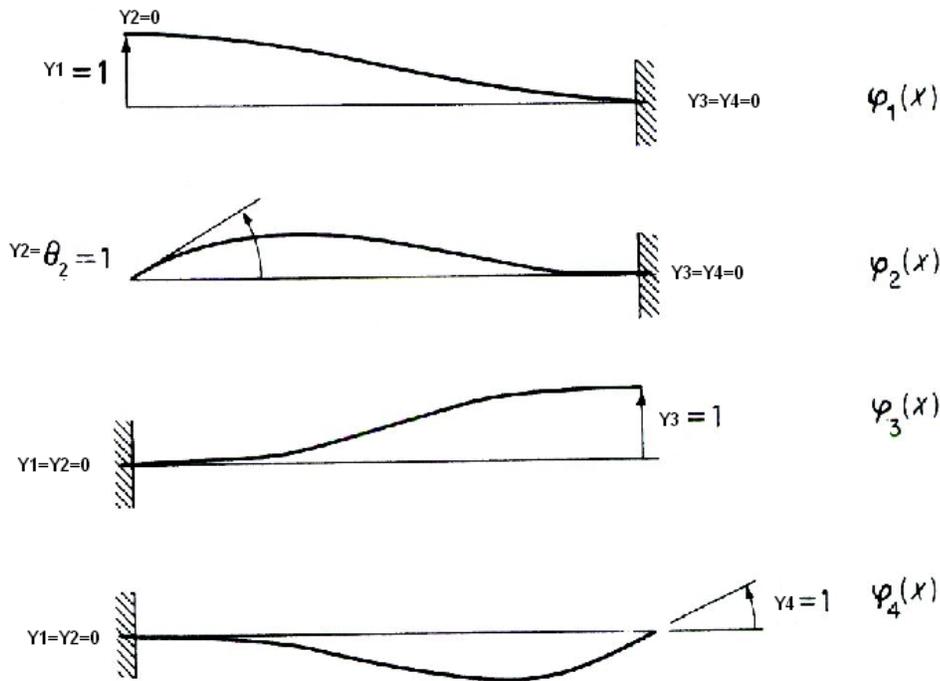


FIG 5.4. Funciones de forma $\psi_i(x)$

Rigidez de viga de Euler en flexión

La matriz de rigidez escrita en términos de sus coeficientes de influencia k_{ij} se indica en ecuación (5-3). Esta matriz relaciona las fuerzas externas actuando en los nodos de un elemento (F_1 y F_3 : fuerzas en ambos nodos ; F_2 y F_4 : cuplas actuando en ambos nodos) y los desplazamientos de los nodos, como se muestra en figura 5.5.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

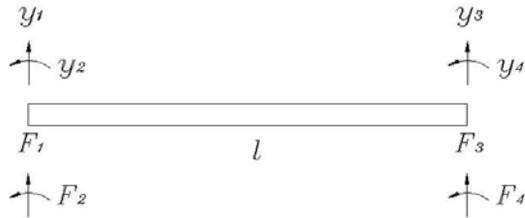


FIG. 5.5. Desplazamientos y fuerzas externas en los nodos de un elemento.

Los elementos de la matriz de rigidez tienen la interpretación siguiente. Si $y_1=1.0$ e $y_2=y_3=y_4=0$, las fuerzas requeridas en los nodos para mantener estos desplazamientos son los coeficientes de influencia de la primera columna

$$\begin{aligned} F_1 &= k_{11} \\ F_2 &= k_{21} \\ F_3 &= k_{31} \\ F_4 &= k_{41} \end{aligned}$$

Similarmente las fuerzas requeridas en los nodos para mantener los desplazamientos: $y_2=1.0$ e $y_1=y_3=y_4=0$ son los coeficientes de influencia de la segunda columna:

$$\begin{aligned} F_1 &= k_{12} \\ F_2 &= k_{22} \\ F_3 &= k_{32} \\ F_4 &= k_{42} \end{aligned}$$

k_{ij} = Fuerza sostenedora en i para producir desplazamiento unitario en j .

EJEMPLO 5.1

La figura 5.6 a) representa un modelo de un edificio de cuatro pisos. Dibuje en un esquema el significado de los términos de la matriz de rigidez que relaciona las fuerzas horizontales F_1 , F_2 , F_3 , y F_4 actuando sobre cada losa 1,2,3 y 4 y las desplazamientos horizontales de ellas : X_1 , X_2 , X_3 , y X_4 .

Los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez son obtenidos dando a la losa 1 un desplazamiento unitario y haciendo que los desplazamientos de las otras losas sean cero. Las fuerzas requeridas para sostener estos desplazamientos son de acuerdo a la mecánica de sólidos y a la figura 5.6 b) las siguientes:

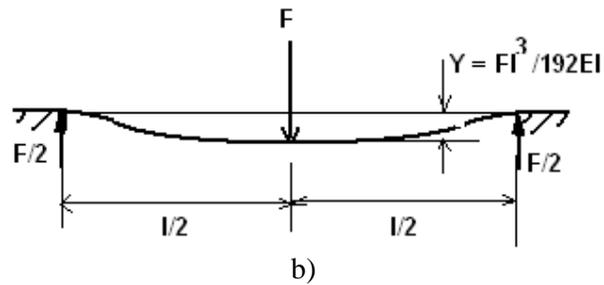
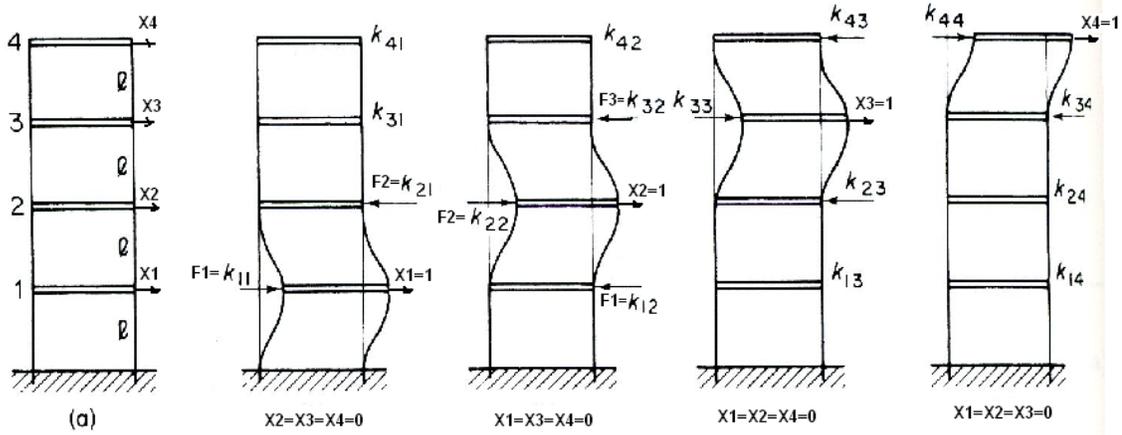


FIG.5.6. Ejemplo

$$F_1 = k_{11} = 192 EI / (2l)^3 = 24 (EI/l^3)$$

$$F_2 = -F_{1/2} = 12 (EI/l^3)$$

similarmente se obtienen los elementos de las otras columnas:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & -12 & 0 & 0 \\ -12 & 24 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

Matriz de rigidez de un elemento finito de viga en flexión de Euler –Bernouilli.

Hemos visto que k_{ij} = Fuerza sostenedora en i para producir desplazamiento unitario en j . Estas fuerzas pueden ser determinadas por el principio de los trabajos virtuales. Consideremos por ejemplo k_{12} (fuerza sostenedora en 1 para obtener un desplazamiento unitario en 2), y consideremos el desplazamiento virtual δy_1 indicado en figura 5.7 (sin variar el valor de $y_2 = 1$).

Habíamos visto que (ecuación (5-2)):

$$y(x) = \Psi_1(x) y_1 + \Psi_2(x) y_2 + \Psi_3(x) y_3 + \Psi_4(x) y_4$$

Si le damos un desplazamiento virtual δy_1 , con $\delta y_2 = \delta y_3 = \delta y_4 = 0$ se tiene, como indica la figura 5.7, que:

$$\delta y(x) = \Psi_1(x) \delta y_1$$

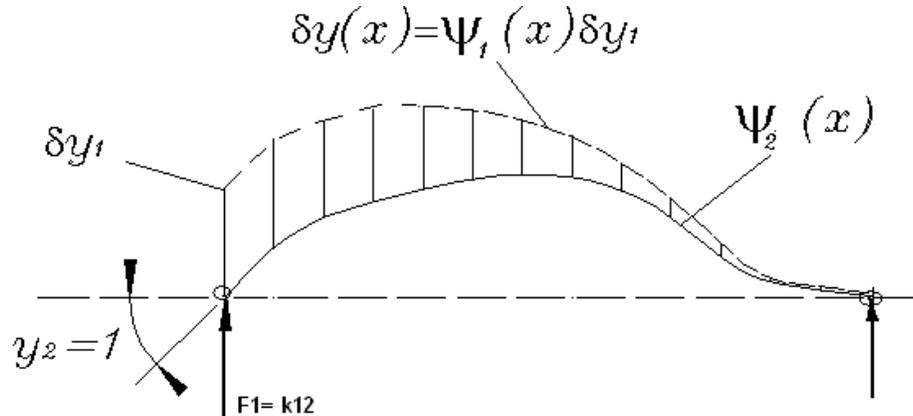


FIG. 5.7. Elemento finito con desplazamientos $y_2=1$; $y_1= y_3= y_4=0$

El trabajo de las fuerzas externas (considerando que la única fuerza externa que realiza trabajo con el desplazamiento virtual dado es $F_1 = k_{12}$):

$$W_E = k_{12} \cdot \delta y_1 \quad (5-4)$$

W_I = Trabajo de los momentos interiores $M(x) = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = EI \frac{d^2 \Psi_2}{dx^2}$ asociados a $y_2=1$, actuando sobre los desplazamientos virtuales $\delta y(x)$.

Recordando que la energía potencial por flexión, U , en una viga es:

$$\left(U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L M(x) \frac{d^2 y}{dx^2} dx \right) = -W_I$$

$$U = \int_0^L M(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\delta y(x)] dx = \int_0^L EI(x) \psi_2''(x) \cdot \psi_1''(x) \delta y_1 dx$$

$$W_E - W_I = 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 k_{12} &= \int_0^L EI(x) \psi_1''(x) \psi_2''(x) dx \\
 k_{ij} &= \int_0^L EI(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx = k_{ji}
 \end{aligned}
 \tag{5-5}$$

De esta forma se puede determinar que la matriz de rigidez en flexión $[K]$ para un elemento de viga o de eje es:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

Procedimiento de ensamble

Cuando el sistema está compuesto por varios elementos de vigas, la matriz global de rigidez del sistema completo se determina con el procedimiento de ensamble. Este procedimiento es ilustrado con el caso particular de la figura 5.8. En este caso el sistema está compuesto de dos elementos de vigas.

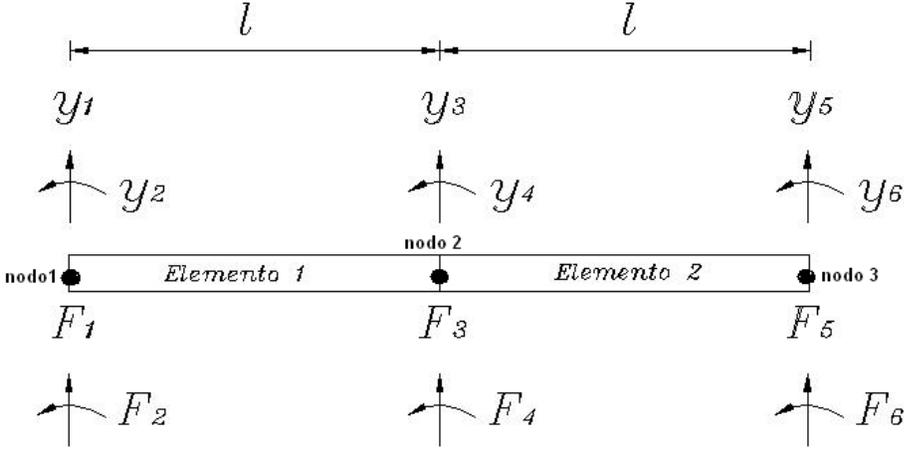


FIG. 5.8. Sistema compuesto por dos elementos de viga.

Para obtener la matriz de rigidez total del sistema, se ensamblan las matrices de rigideces de cada elemento como se indica a continuación. En este caso los dos elementos a ensamblar tienen 2 desplazamientos comunes: y_3 y y_4 , por lo que los coeficientes de rigideces comunes a dichos nodos se suman.

La matriz global entonces relaciona las fuerzas externas actuando en los nodos del sistema con los desplazamientos de los nodos

1) Matriz de masas concentradas

Consiste en suponer que toda la masa está concentrada en los puntos nodales como masas puntuales, como se ilustra en figura 5.9. Esta matriz es una matriz diagonal que desprecia la inercia a rotación (una masa puntual no tiene inercia a la rotación). Si se consideran grados de libertad de rotación, existirán términos diagonales nulos como se indica en la matriz siguiente.

$$[M]\{\ddot{y}\} = \begin{bmatrix} m/2 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & m/2 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_4 \\ \ddot{y}_5 \\ \ddot{y}_6 \end{Bmatrix}$$

2) Matriz de masas coherente

Los coeficientes de la matriz de masa m_{ij} son determinados utilizando un procedimiento similar al utilizado para determinar los coeficientes de la matriz de rigidez k_{ij} .

Los coeficientes m_{ij} son definidos como las fuerzas de inercia generadas en los nodos del elemento para aceleraciones unitarias ($f_i = m_{ij} a_j (=1)$). Físicamente se trata de reemplazar la masa distribuida del elemento por inercias concentradas en los nodos que generen las mismas fuerzas de inercia

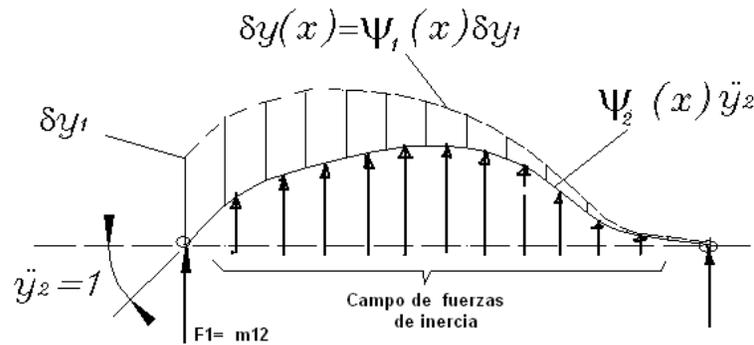


FIG. 5.10. Campo de fuerzas de inercia en el elemento finito

$$y(x,t) = \text{desplazamiento del elemento cuando } y_1 = y_3 = y_4 = 0$$

$$y(x,t) = \Psi_2(x) y_2(t)$$

$$\ddot{y}(x,t) = \Psi_2(x) \ddot{y}_2(t)$$

Si a la viga se le da una aceleración:

$$\ddot{y}_2(t) = 1$$

Se obtendrá a lo largo de la viga un campo de aceleraciones:

$$\ddot{y}(x, t) = \Psi_2(x) \ddot{y}_2(t)$$

Las fuerzas de inercia que se oponen al movimiento son:

$$f_1(x) = m(x) \ddot{y}_2(x) = m(x) \Psi_2(x) \ddot{y}_2$$

$$m_{12} \delta y_1 = \int f_1(x) \delta y(x) dx = \int m(x) \Psi_2(x) \Psi_1(x) \delta y_1 dx$$

$$m_{12} = \int_0^l m(x) \Psi_1(x) \Psi_2(x) dx$$

En forma general:

$$m_{ij} = \int_0^l m(x) \Psi_i(x) \Psi_j(x) dx \quad (5-6)$$

A partir de la ecuación (5-6) se obtiene que la matriz de masas coherentes para el elemento de viga. De ecuación (5-6) se observa que la matriz de masas coherente es simétrica. Reemplazando los valores se obtiene:

$$[M] = m/420 \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 5.2.

Determine la matriz de masas coherentes de la viga simplemente apoyada de la figura 5.11. Considere el sistema compuesto de 2 elementos finitos cada uno de masa m .

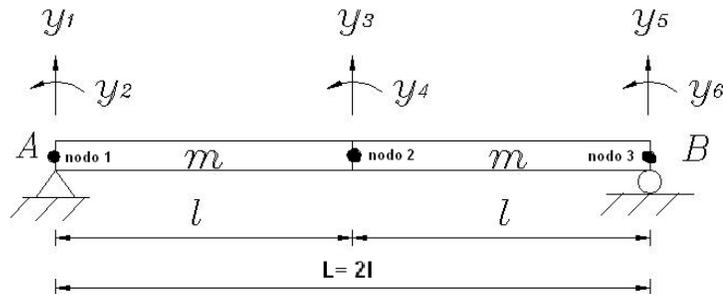


FIG. 5.11. Viga ejemplo 5.2.

Para obtener la matriz de masas se utiliza un procedimiento de ensamble de las matrices de masas individuales de cada elemento, similar al utilizado para obtener la matriz de rigidez global.

La matriz de masas coherente para el sistema es entonces:

$$[M] = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l & 0 & 0 \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ & & 312 & 0 & 54 & -13l \\ & & & 8l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & & & 156 & -22l \\ & & & & & 4l^2 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 5.3

Para la viga simplemente apoyada de figura 5.11 y tomando 2 elementos finitos:

- Determine la deflexión en su punto medio cuando allí actúa una fuerza F_0 .
- Determine la primera frecuencia natural y su modo de vibrar en flexión de la viga. Utilice la matriz de masas discretas.
- Si en su punto medio actúa $F_0 \text{ sen} \Omega t$, determine la amplitud estacionaria en su punto medio. $F_0 = 1000 \text{ N}$; $\Omega = 500 \text{ rad/s}$.

$$m = 2,0 \text{ Kilógramos}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

$$EI / l^3 = 200.000 (\text{N} / \text{m})$$

a) Deflexión en el punto medio

La figura 5.12 muestra el diagrama de cuerpo libre del sistema:

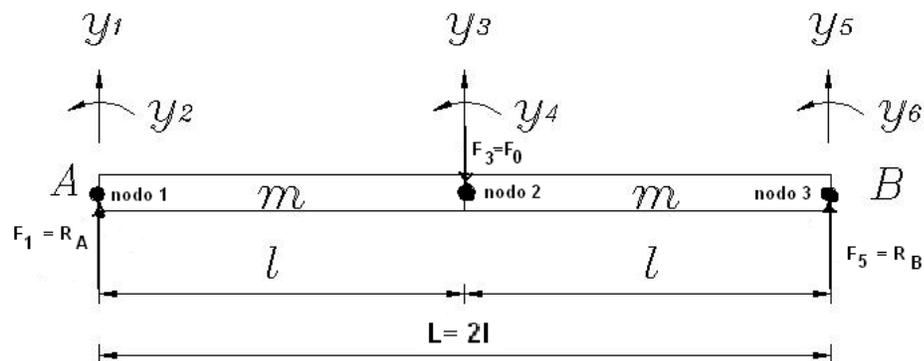


FIG.5.12. Diagrama de cuerpo libre

Reemplazando los valores de las fuerzas externas y las condiciones de borde del sistema en la ecuación $F = K Y$, se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_A \\ 0 \\ -F_0 \\ 0 \\ R_B \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 (= 0) \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 (= 0) \\ y_6 \end{Bmatrix} \quad (5-7)$$

La primera y quinta ecuación introduce las reacciones R_A y R_B y no nos sirven para determinar los desplazamientos. Considerando las otras 4 ecuaciones obtenemos el siguiente sistema de 4 ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{array}{l} 0 = 4l^2 y_2 - 6ly_3 + 2l^2 y_4 \\ \frac{-b^3}{EI} F_0 = -6ly_2 + 24y_3 + 6ly_6 \\ 0 = 2l^2 y_2 + 8l^2 y_4 + 2l^2 y_6 \\ 0 = 6ly_3 + 2l^2 y_4 + 4l^2 y_6 \end{array}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\Rightarrow y_3 = \frac{-F_0 l^3}{6EI} = \frac{-F_0 L^3}{48EI}$$

$$y_2 = \frac{-F_0 L^2}{4EI} \quad (\text{Negativo: ángulo horario y por simetría } y_2 = -y_6)$$

$$y_6 = \frac{F_0 L^2}{4EI} = \frac{F_0 l^2}{16EI}$$

$$y_4 = 0 \quad (\text{por la simetría la pendiente en el nodo 2 debe ser cero})$$

Las ecuaciones de la primera y quinta columna permiten determinar las reacciones en los apoyos:

$$R_A = (EI/l^3) (6ly_2 - 12y_3 + 6ly_4) = (EI/l^3) (6l(-F_0 l^2/4EI) - 12((-F_0 l^3)/6EI)) = F_0/2$$

$$R_B = (EI/l^3) (-12y_3 + 6ly_4 - 6ly_6) = F_0/2$$

b) Ecuaciones del movimiento

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_4 \\ \ddot{y}_6 \end{Bmatrix} + 200.000 \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 & 0 \\ -6 & 24 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_6 \end{Bmatrix} = 0$$

Se ha eliminado la primera y quinta fila del sistema de ecuaciones (5-7) pues introduce las reacciones R_A y R_B que no nos sirven para determinar los desplazamientos. Se ha eliminado también la primera y quinta columna considerando que sus elementos quedan multiplicados por $y_1 = y_5 = 0$ y por lo tanto se eliminan.

Condensación estática de Guyan.

El término **condensación** se refiere en general a la reducción del tamaño de un sistema de ecuaciones eliminando un cierto número de grados de libertad. Cuando se usa la modelación de masas discretas del sistema se obtiene un número de ecuaciones estáticas donde no están involucradas las aceleraciones. Esto se debe a que no se ha despreciado la inercia a las rotaciones.

Es conveniente entonces en este caso para disminuir el número de ecuaciones, eliminar los grados de libertad de rotación $q_r(y_2, y_4, y_6, y_8, \dots)$ expresándolos en función de los grados de traslación $q_t(y_1, y_3, y_5, y_7, \dots)$ que son los que interesan.

De la primera tercera y cuarta ecuación del movimiento se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} 4y_2 - 6y_3 + 2y_4 = 0 \\ 2y_2 + 8y_4 + 2y_6 = 0 \\ 6y_3 + 2y_4 + 4y_6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_2 = 1,5y_3 \\ y_4 = 0 \\ y_6 = -1,5y_3 \end{array} \right\} (*)$$

Reemplazando (*) en la segunda ecuación del movimiento se obtiene:

$$\begin{aligned} 2\ddot{y}_3 + 200.000(-6y_2 + 24y_3 + 6y_6) &= 0 \\ 2\ddot{y}_3 + 1.200.000y_3 &= 0 \\ \Rightarrow \omega_1 &= \sqrt{\frac{1.200.000}{2}} = 774,6 \text{ (rad / s)} \end{aligned}$$

Modo de vibrar

De (*), normalizando con: $y_2 = 1,0$, se obtiene: $y_3 = 0,666$; $y_4 = 0$; $y_6 = -1,0$, lo que se grafica en figura 5.13

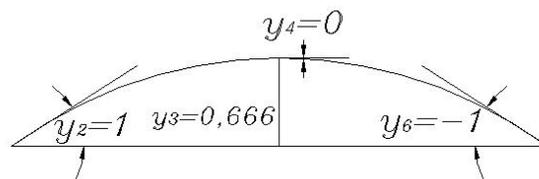


FIG. 5.13. Primer modo de vibrar en flexión

Comparando el valor de ω_1 obtenido, con el valor exacto obtenido anteriormente considerando la barra como un continuo:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \frac{\pi^2}{2^2} \sqrt{\frac{200.000}{4/2}} = 780,2 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

se concluye que el error cometido es de un 0.7%

Comparando el modo obtenido: $\{x^1\}^T = \{1 \quad -0.666 \quad 0 \quad -1\}$

con el real : $X(x) = \text{sen}(\pi x/L) = \text{sen}(\pi x/2)$, el cual discretizado es:

$$\{x^1\}^T = \{\pi/2 \quad 1 \quad 0 \quad -\pi/2\}$$

el cuál normalizado para $y_2=1$, es:

$$\{x^1\}^T = \{1 \quad -0.637 \quad 0 \quad -1\}$$

se observa que el error cometido es pequeño

c.- Vibración forzada estacionaria

Al aplicar la fuerza armónica en el nodo 3, las ecuaciones del movimiento quedan:

$$2y_3 + 1.200.000y_3 = 1.000 \text{ sen } 500t$$

$$y_3 = \frac{1.000/1.200.000}{1 - (500/774,6)^2} = 1,43(\text{mm})$$

Procedimiento de condensación

El procedimiento de condensación realizado en el ejemplo anterior, se puede generalizar utilizando matrices, como se muestra a continuación.

Si llamamos:

$q_t =$ grados de traslación

$q_\theta =$ grados de rotación a eliminar.

$$\begin{bmatrix} k_{tt} & k_{t\theta} \\ k_{\theta t} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_t \\ q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_t \\ F_\theta = 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{Inercia a la rotación} = 0)$$

$$\begin{bmatrix} 24 & -6 & 0 & 6 \\ -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_4 \\ y_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{tt} & | & k_{t\theta} \\ - & | & - \\ k_{\theta t} & | & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_t \\ - \\ q_\theta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} k_{tt} q_t + k_{t\theta} q_\theta = F_t \\ k_{\theta t} q_t + k_{\theta\theta} q_\theta = 0 \end{cases} \quad \rightarrow q_\theta = -k_{\theta\theta}^{-1} k_{\theta t} q_t$$

$$\Rightarrow [k_{tt} - k_{t\theta} k_{\theta\theta}^{-1} k_{\theta t}] \{q_t\} = \{F_t\}$$

$$[k_t] \{q_t\} = \{F_t\}$$

EJEMPLO 5.4

Para el sistema del ejemplo 5.3 determine la primera frecuencia natural de vibrar en flexión de la viga. Utilice la matriz de masas coherentes.

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\frac{2}{420} \begin{bmatrix} 4 & 13 & -3 & 0 \\ 13 & 312 & 0 & -13 \\ -3 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & -13 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_4 \\ \ddot{y}_6 \end{Bmatrix} + 200.000 \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 & 0 \\ -6 & 24 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_6 \end{Bmatrix} = 0$$

Utilizando MATLAB:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 13 & -3 & 0 \\ 13 & 312 & 0 & -13 \\ -3 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & -13 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 & 0 \\ -6 & 24 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

>> [E,EE]= eig(inv(M)*K)

$$E = \begin{bmatrix} 0.5774 & -0.7050 & 0.5774 & -0.6448 \\ -0.0000 & 0.0771 & 0.0000 & -0.4106 \\ 0.5774 & 0.0000 & -0.5774 & -0.0000 \\ 0.5774 & 0.7050 & 0.5774 & 0.6448 \end{bmatrix}$$

EE = 1.0e+008 *

$$\begin{bmatrix} 2.5200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7582 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0061 \end{bmatrix}$$

El valor obtenido para la primera frecuencia natural de vibrar:

$$\omega_1 = \sqrt{610.000} = 781 \text{ (rad / s)}$$

comparado con el valor exacto : 780.2(rad/s) se observa que tiene un error mínimo

El modo obtenido para el primer modo es:

$$\{x^1\}^T = \{-0.6448 \quad -0.4106 \quad 0 \quad -0.6448\}$$

el cuál normalizado para $y_2=1$, es:

$$\{x^1\}^T = \{1 \quad -0.637 \quad 0 \quad -1\}$$

se observa que es coincidente con el valor real.

NOTA. Se observa que los cálculos realizados utilizando la matriz de masas discretas son mucho más cortos que los realizados al utilizar la matriz de masas coherentes. Como en la mayoría de los casos el error cometido al utilizar la matriz de masas discretas es insignificante, en adelante solo utilizaremos la matriz de masas discretas.

1.2. Modelación de una viga vibrando axialmente

Rigidez de una viga en movimiento axial

Figura 5.14 muestra un elemento de viga de dos nodos, sobre el que actúan dos fuerzas externas F_1 y F_2 en ellos. Los desplazamientos axiales de los nodos se denotan por u_1 y u_2 respectivamente.

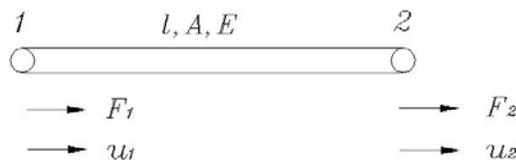


FIG. 5.14. Elemento finito de barra en movimiento axial.

Utilizando la ley de Hooke se obtiene:

$$F_1 = EA(u_1 - u_2)/\ell$$

$$F_2 = -F_1 = EA(u_2 - u_1)/\ell$$

En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{donde: } [K] = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

1.3. Modelación de una viga o un eje circular vibrando en torsión

Rigidez de un eje circular en torsión

Consideremos un elemento de eje circular con dos nodos como el indicado en figura 5.15

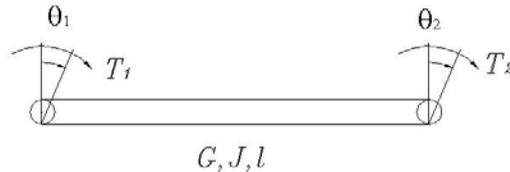


FIG. 5.15. Elemento de barra en torsión

$$T_1 = GJ (\theta_1 - \theta_2) / \ell$$

$$T_2 = -T_1 = GJ (\theta_2 - \theta_1) / \ell$$

En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

donde: $[K] = \frac{GJ}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

1.4. Rigidez geométrica de vigas en flexión (ligada a la tendencia de la viga a pandearse)

La aproximación más simple se deduce del modelo de la figura 5.16, donde se supone que todas las fuerzas axiales actúan sobre un sistema auxiliar formado por barras articuladas entre ellas y ligadas a la barra principal de modo que solo transmiten los esfuerzos transversales y no las componentes axiales de la fuerza.

Suponemos que las fuerzas axiales permanecen constantes y no son afectadas por las cargas dinámicas (si estas variaran en el tiempo, la rigidez de la viga sería variable, es decir tendría comportamiento de sistema no-lineal).

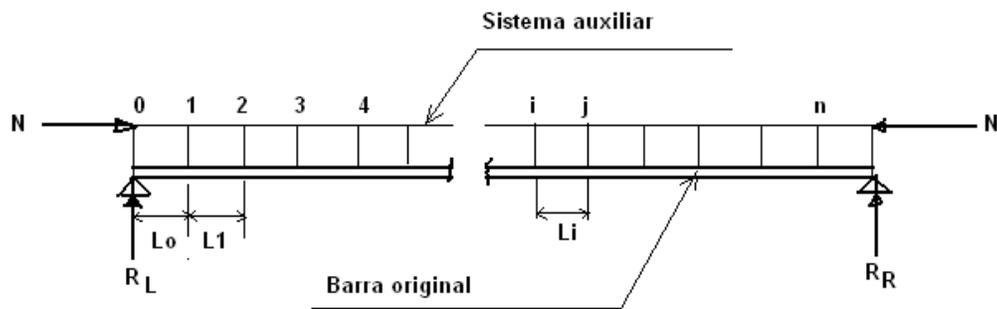


FIG. 5.16. Elemento de barra en flexión con carga axial

1.4.1. Aproximación lineal

Cuando la viga se deforma, el sistema auxiliar está restringido a deformarse de la misma forma. Debido a estas deformaciones y a los esfuerzos axiales presentes en el sistema auxiliar se crean fuerzas de acoplamiento con el sistema principal. Dicho de otra forma, la resistencia del sistema principal será necesaria para la estabilidad del sistema principal.

Para un elemento genérico "i", las componentes transversales de las fuerzas f_i y f_j dependen de la componente axial de la fuerza N y de la orientación del segmento.

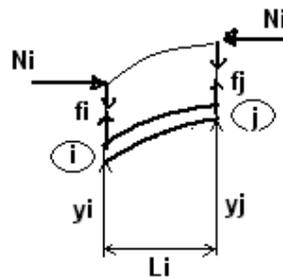


FIG. 5.17. Elemento entre los nodos "i" y "j"

Efectuando equilibrio de momentos en el sistema auxiliar se obtiene:

$$\begin{aligned} f_i &= (y_i - y_j) N_i / L_i & \rightarrow & f_i L_i - (y_i - y_j) N_i = 0 \\ f_j &= (y_j - y_i) N_i / L_i & \rightarrow & f_j L_i - (y_j - y_i) N_i = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} = \frac{N_i}{L_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix}$$

Ensamblando para todos los elementos se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} R_L \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \\ R_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0/L_0 & -N_0/L_0 & & & & \\ -N_0/L_0 & N_0/l_{1,0} + N_1/l_{1,1} & -N_1/L_1 & & & \\ & -N_1/L_1 & -N_1/L_1 & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{L=0} \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \\ y_{R=0} \end{Bmatrix}$$

$$\{f\} = [K_G]\{y\}$$

$[K_G]$: Matriz de rigidez geométrica

1.4.2. Matriz de rigidez geométrica coherente

De forma similar a las matriz de masa, se puede obtener una matriz de rigidez geométrica coherente, cuyos coeficientes son:

$$k_{G_{ij}} = \int_0^L N(x) \Psi_i(x) \Psi_j(x) dx$$

Obteniéndose para un elemento sobre el que actúa una fuerza N constante:

$$[K_G] = N/30L \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ & & 36 & 3L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

NOTAS FINALES:

- En la mayoría de los casos prácticos, la mayor exactitud del método coherente es pequeña respecto al otro método que es mucho más corto, por lo que utilizaremos en el presente curso sólo este último método.
- La ventaja del método coherente parece ser que por provenir de un cálculo coherente, son aplicables las conclusiones de los métodos variacionales (la existencia de bordes de cálculo). Es así, que las frecuencias naturales determinadas por este método serán mayores que las verdaderas.