

INDICE

CAPITULO I.

EQUILIBRIO ESTATICO

PROBLEMAS

D.C.L

CAPÍTULO II

ESFUERZO Y DEFORMACIONES

ESFUERZO

CLASES DE ESFUERZOS

ESFUERZOS NORMALES

TRACCIÓN O COMPRESIÓN

ESFUERZOS DE FLEXIÓN

DIRECTOS O CIBALLADURA

ESFUERZO DE APLASTAMIENTO

FUERZAS EN CADA BARRA

DIAGRAMA DE CARGAS AXIALES

ESFUERZOS DE COMPRESION Y/O TRACCION

RESISTENCIA DE MATERIAL

RESISTENCIA OBTENIDAS

ENSAYO DE TRACCIÓN PURA

ESFUERZO DE DISEÑO Y FACTOR DE SEGURIDAD

FACTOR DE SEGURIDAD (F.S)

ESTUDIO DE LAS DEFORMACIONES

DIAGRAMA DE CARGAS AXIALES

TRAMO: AB

TRAMO: BC

TRAMO: CD

DIAGRAMA DE TRACCION

ESFUERZOS

FACTOR DE SEGURIDAD

CALCULO DE LAS DEFLEXIONES

CALCULO DE δ_E

CALCULO DE X

EN LOS TRIANGULOS MEE' Y MDD'

SISTEMAS HIPERESTATICOS

ESFUERZO EN BC : (COMPRESIÓN)

ESFUERZOS TERMICOS

ANALISIS PROPORCIONAL

TRANSMISION DE POTENCIA

MEDIANTE FAJAS

CINEMATICA

DINAMICA

RELACIÓN DE TENSIONES

TRANSMISION DE POTENCIA

MEDIANTE CADENA

TORQUE EN EL PIÑÓN MOTRIZ.

TORQUE POTENCIA

TORQUE EN EL EJE DEL LA CATALINA.

TORQUE EN EL PIÑÓN MOTRIZ

TORQUE – POTENCIA

TRANSMISIÓN DE POTENCIA

TORSIÓN

ESFUERZO CORTANTE DE TRACCION

ANGULO DE TORSION

DIAGRAMAS DE MOMENTOS TORSORES

ESFUERZOS CORTANTE MAXIMO

ANGULO DE TORSION DE LA SECCION E RESPECTO A LA SECCION A.

ANGULO $\phi_{E/A}$

FACTOR SEGURIDAD

CORTANDO LA BARRA

CASOS PARTICULARES

SECCION CIRCULAR

PROBLEMA

DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES

DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE Y MOMENTOS FLECTORES

DIAGRAMA DE FUERZAS CORTANTES

MOMENTOS FLECTORES

UBICACIÓN DE FN Ó FC

CALCULO DEL MOMENTO DE INERCIA I

BIBLIOGRAFÍA

S
D
F
D

RESISTENCIA DE MATERIALES

CAPITULO I.

EQUILIBRIO ESTATICO:

$$\sum F = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\text{ó } \sum F_y = 0 \rightarrow \sum F_z = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

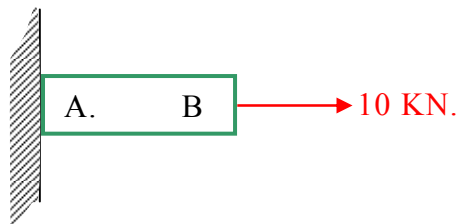
$$\sum F_z = 0$$

$$\sum F = 0$$

$$\sum F_0 = 0 \begin{cases} \sum M_0 x - x = 0 \\ \sum M_0 y - y = 0 \\ \sum M_0 z - z = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA N° 1

Calcular la reacción en A.



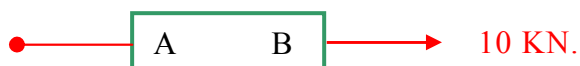
$$\sum F_x = 0$$

$$-Ax + 10 \text{ KN} = 0$$

$$10 \text{ KN} = Ax.$$

Sentido asumido es correcto.

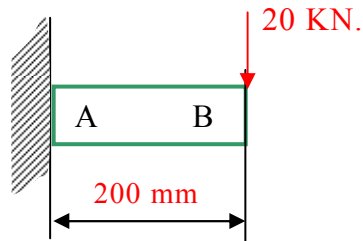
D.C.L



Las fuerzas actúan en pares.

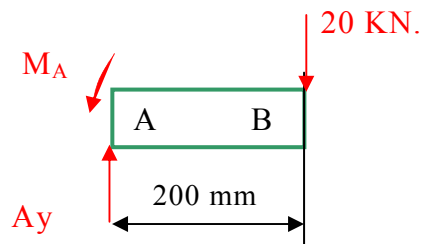
PROBLEMA N° 2

Calcular la reacción en A y el momento de empotramiento.



Solución:

DoCol



$$\sum F_x = 0$$

→ No se aplica, porque no hay fuerzas en "X".

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y - 20 \text{ kN} = 0$$

$$A_y = 20 \text{ kN.}$$

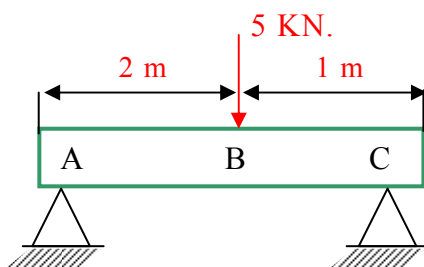
$$\sum M_A = 0$$

$$M_A - 20 \text{ kN} \times 200 \text{ mm} = 0$$

$$M_A = 4000 \text{ kN} \cdot \text{mm}$$

PROBLEMA N° 3

Calcular las reacciones en A y C.



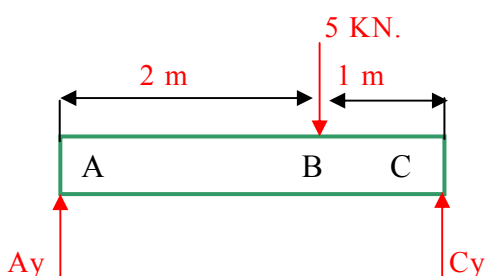
Solución:

A y C son apoyos.

C es apoyo móvil.

No existe momento de empotramiento en los apoyos.

Do Col



$$\sum F_x = 0$$

No se aplica

$$\sum F_y = 0$$

$$-A_y + 5 \text{ kN} - C_y = 0$$

$$5 \text{ kN} = A_y + C_y \dots (1)$$

$$\Sigma M_0^A = 0$$

$$- 5 \text{ KN} \cdot 2\text{m} + C_y \cdot 3\text{m} = 0$$

$$C_y = 5\text{KN} \cdot \frac{2 \text{ m}}{3 \text{ m}}$$

$$C_y = 3 \frac{1}{3} \text{ KN} = 3,3 \text{ KN}$$

$$\Rightarrow A_y + C_y = 5\text{KN}$$

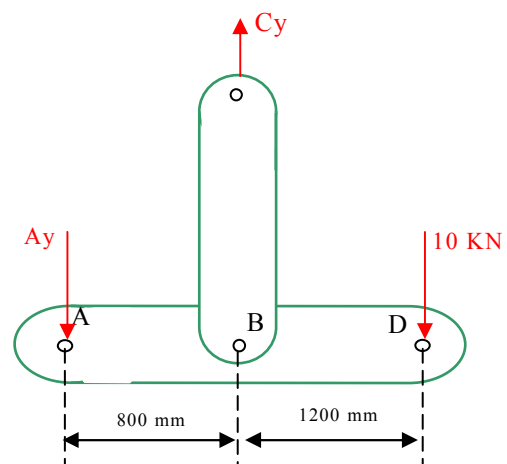
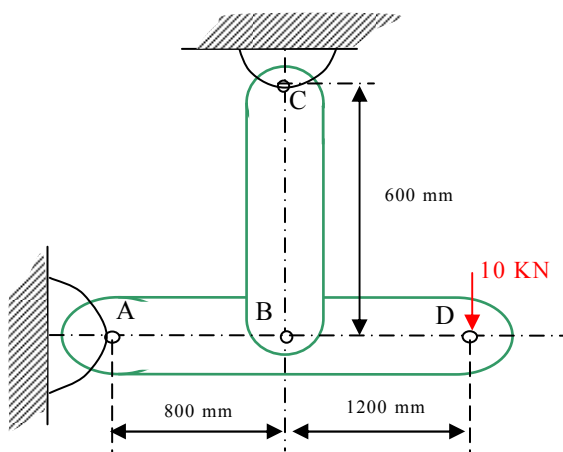
$$A_y = 5\text{KN} - 3 \frac{1}{3} \text{ KN} = 1 \frac{2}{3} \text{ KN}$$

$$A_y = 1,6 \text{ KN}.$$

PROBLEMA N° 4

Calcular las reacciones en A y C además calcular las fuerzas que actúan en cada barra.

Solución: D.C.L de toda la estr.



$$\Sigma F_x = 0$$

No se aplica.

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-A_y + C_y - 10\text{KN} = 0$$

$$C_y - A_y = 10 \text{ KN} \dots (1)$$

$$\text{En (1) } 25 \text{ KN} - A_y = 10 \text{ KN}$$

$$15 \text{ KN} = A_y.$$

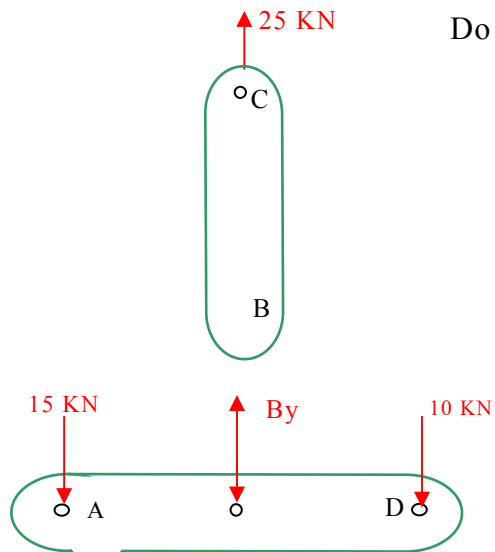
$$\Sigma F_y = 0$$

$$C_y \cdot 800 \text{ mm} - 10\text{KN} \times 2000 \text{ mm} = 0$$

$$C_y = \frac{10 \text{ KN} \cdot 2000 \text{ mm}}{800 \text{ mm}}$$

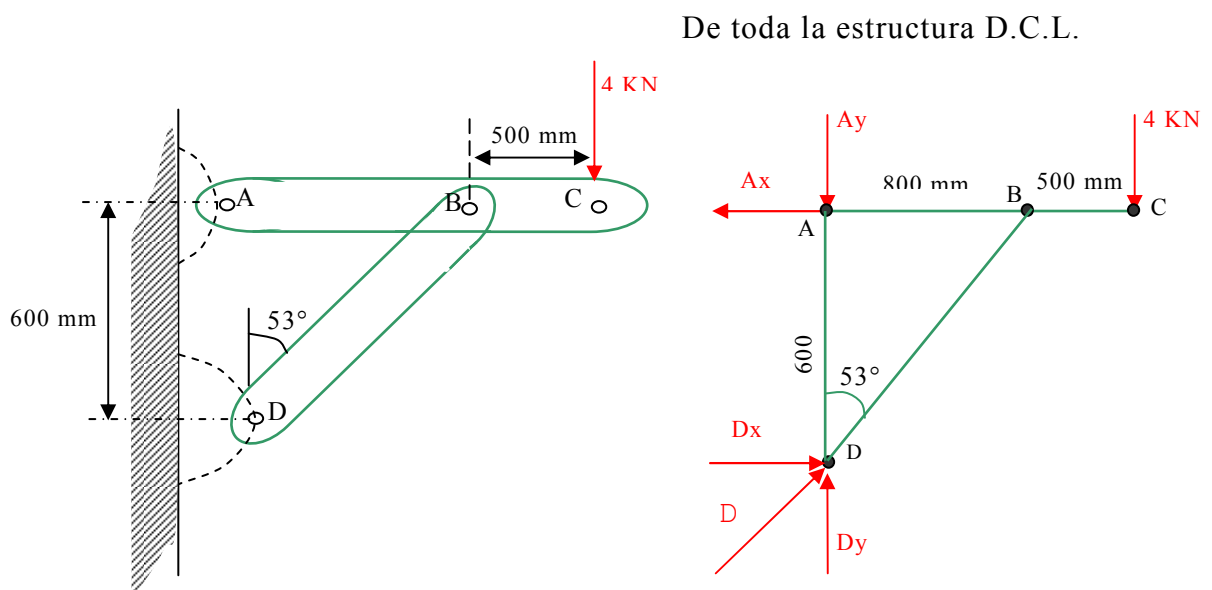
$$C_y = 25 \text{ KN. Sentido asumido es correcto.}$$

$$C_y = 25 \text{ KN}.$$

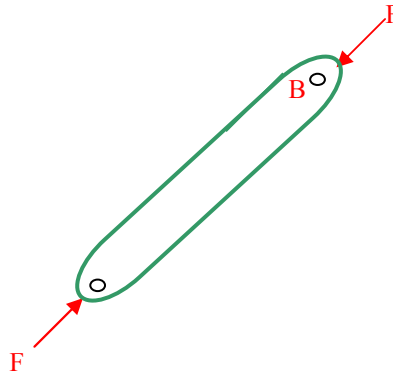


PROBLEMA N° 5

Calcular las reacciones en A y D además las fuerzas que actúan en cada barra.



La fuerza F es colineal con la barra DB .
 Cuando una barra tiene solo fuerzas en los extremos, dichas fuerzas son iguales de sentidos contrarios y COLINEALES con la barra.



$$\sum F_x = 0$$

$$-A_x + D_x = 0 \dots (1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + 4 \text{ KN} - D_y = 0 \dots (2)$$

$$\sum M_0^A = 0$$

$$-D_x \cdot 600 \text{ mm} + 4 \text{ KN} \cdot 1300 \text{ mm} = 0$$

$$D_x = \frac{4 \text{ KN} \cdot 1300 \text{ mm}}{600 \text{ mm}}$$

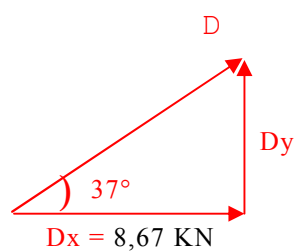
$$D_x = 8,67 \text{ KN}.$$

En (1)

$$A_x = D_x$$

$$A_x = 8,67 \text{ KN}$$

En el punto D



$$\frac{D_y}{D_x} = \tan 37^\circ$$

$$\frac{D_y}{8,67 \text{ KN}} = \tan 37^\circ$$

$$D_y = (\tan 37^\circ)(8,67 \text{ KN})$$

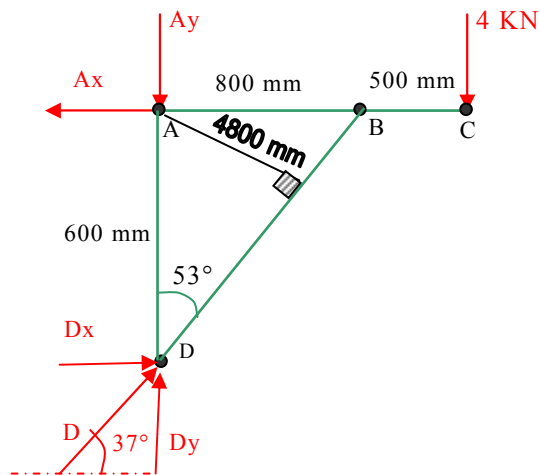
$$D_y = 6,5 \text{ KN}$$

En (2)

$$A_y + 4 \text{ KN} - 6,5 \text{ KN} = 0$$

$$A_y = 2,5 \text{ KN.}$$

2^{DA} FORMA:



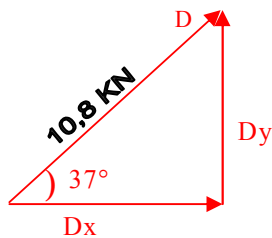
$$D \cdot 480 \text{ mm} - 4 \text{ KN} \cdot 1300 \text{ mm} = 0$$

$$D = 4 \text{ KN} \cdot 1300 \text{ mm}$$

$$4800 \text{ mm}$$

$$D = 10,8 \text{ KN}$$

En el punto "D"



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x - D_x = 0$$

$$A_x = D_x$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\rightarrow A_y + 4 \text{ KN} - D_y = 0$$

$$A_y = 6,5 \text{ KN} - 4 \text{ KN}$$

$$A_y = 2,5 \text{ KN}$$

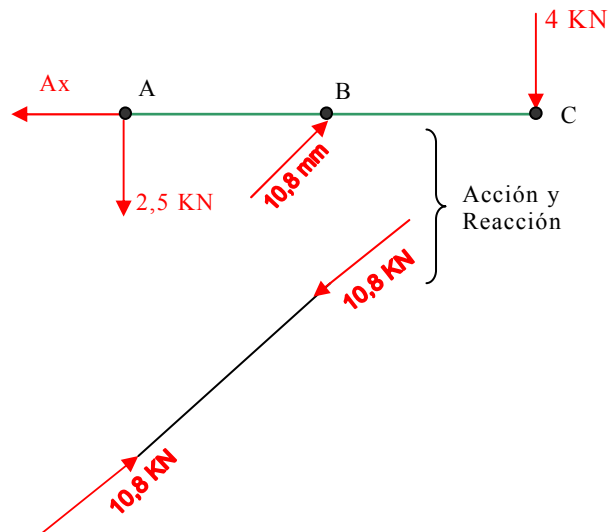
$$D_y = 10,8 \text{ KN} \cdot \text{Sen } 37^\circ$$

$$D_y = 6,5 \text{ KN}$$

$$D_x = 10,8 \text{ KN} \cdot \text{Cos } 37^\circ$$

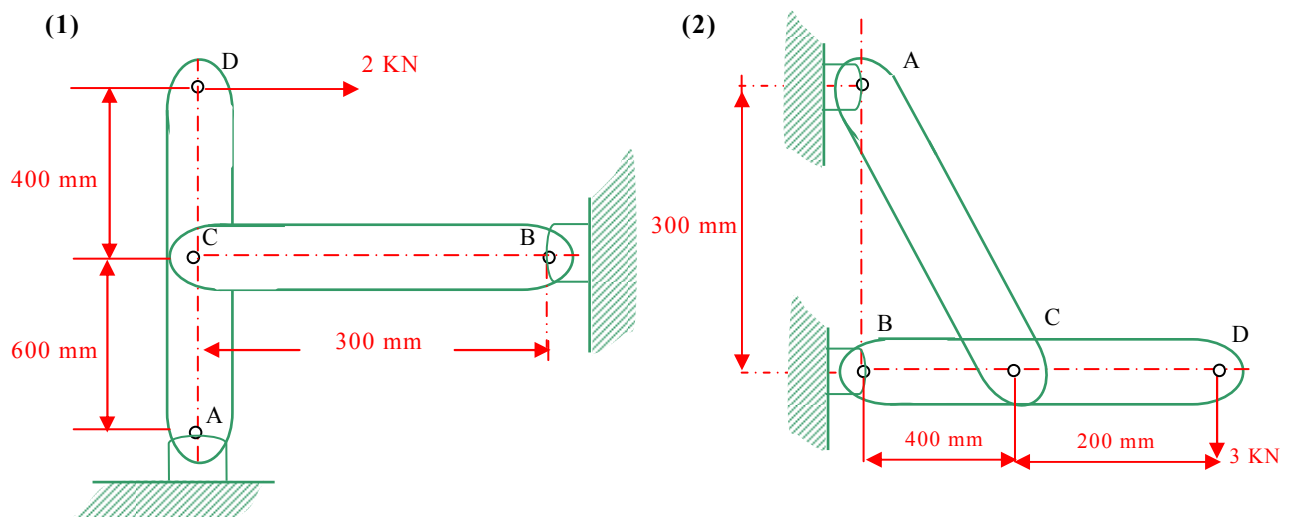
$$D_x = 8,67 \text{ KN}$$

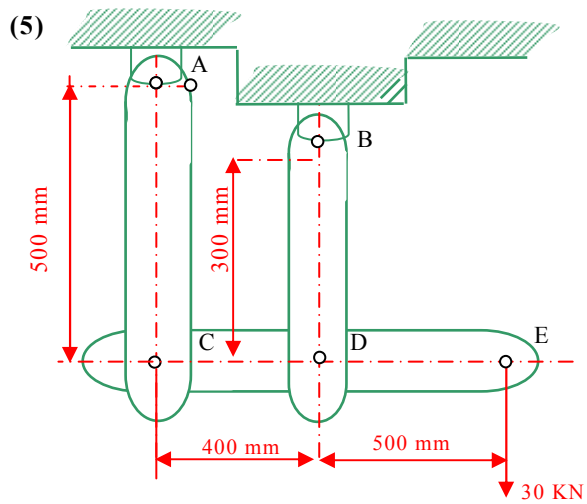
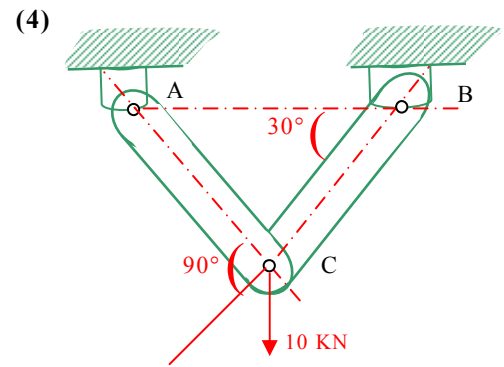
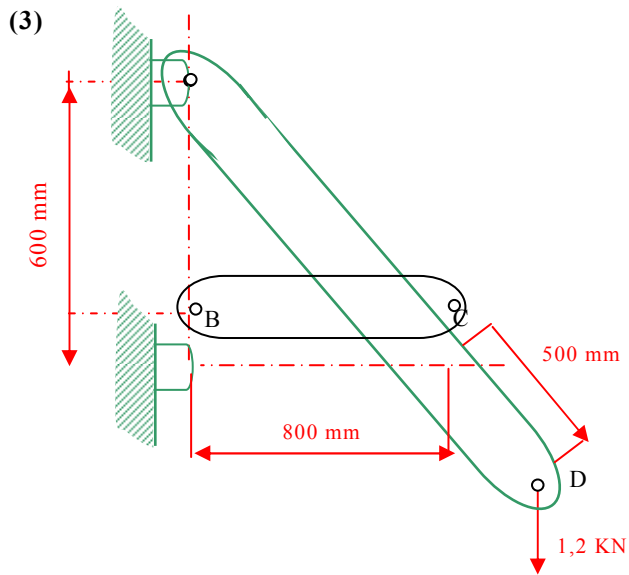
DCL de cada barra.



PROBLEMA N° 1

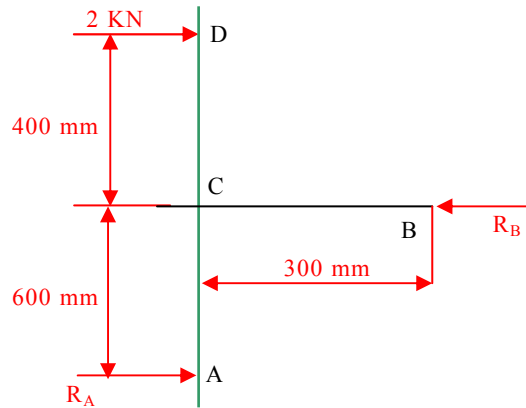
Calcular las reacciones en los apoyos A y B haciendo el diagrama de cuerpo libre de toda la estructura además calcular las fuerzas que actúan en cada barra.





1) DESARROLLO:

D.C.L de la
estructura



$$\Sigma M_0^B = 0$$

$$\Rightarrow 2\text{ kN} \times 400 - R_A \times 600 = 0$$

$$R_A = 1,3 \text{ kN}$$

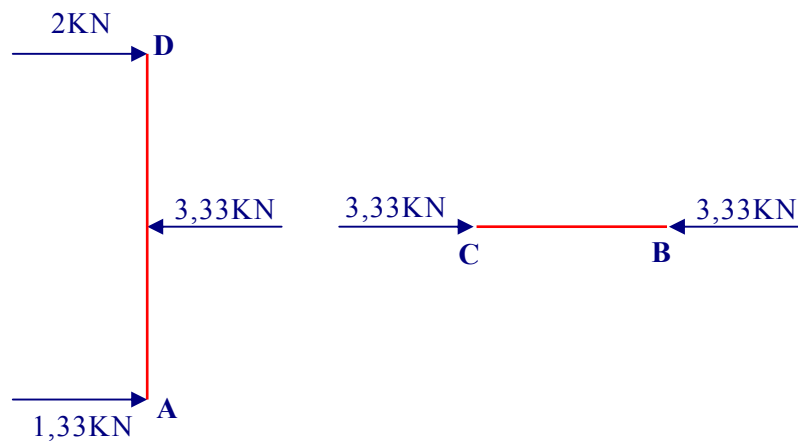
Sentido asumido es correcto.

$$\Sigma M_0^A = 0$$

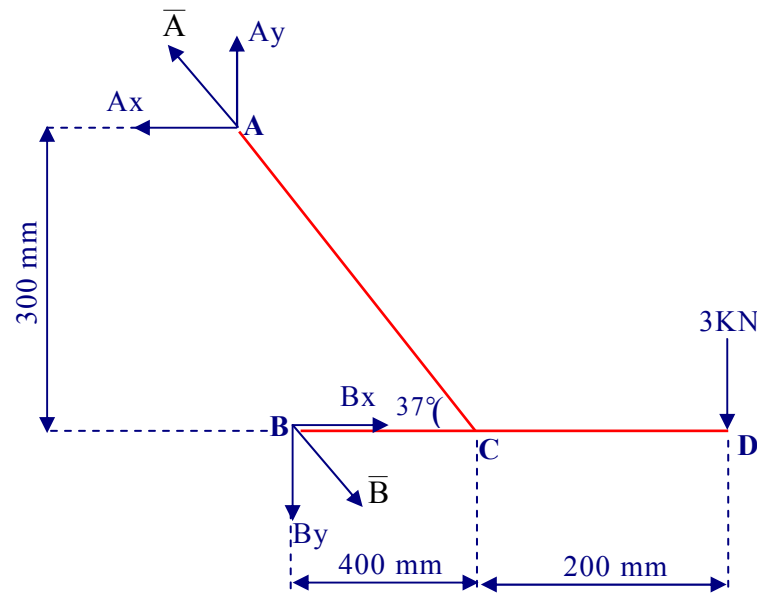
$$\Rightarrow 2\text{ kN} \times 1000 - R_B \times 600 = 0$$

$$R_B = \frac{2 \times 1000}{600} = 3,33 \text{ kN}$$

D.C.L DE C/ BARRA



2) DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE TODA LA ESTRUCTURA:



$$\bar{\Sigma} M_0^B = 0$$

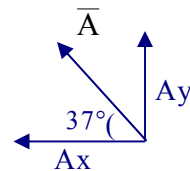
$$3 \text{ KN} \times 600 \text{ mm} - A_x \times 300 \text{ mm} = 0 \quad \therefore A_y = 6 \text{ KN} \times \text{Tg } 37^\circ =$$

$$A_x = \frac{3 \text{ KN} \times 600 \text{ mm}}{300 \text{ mm}} = 6 \text{ KN} \quad A_y = 4,52 \text{ KN}$$

Por $\angle$ de 37°

y tg. de 37° tenemos que

$$A_y = A_x \text{ tg } 37^\circ$$



$$\bar{\Sigma} F_y = 0$$

$$A_y - B_y - 3 \text{ KN} = 0$$

$$B_y = -3 \text{ KN} + A_y$$

$$B_y = 1,52 \text{ KN}$$

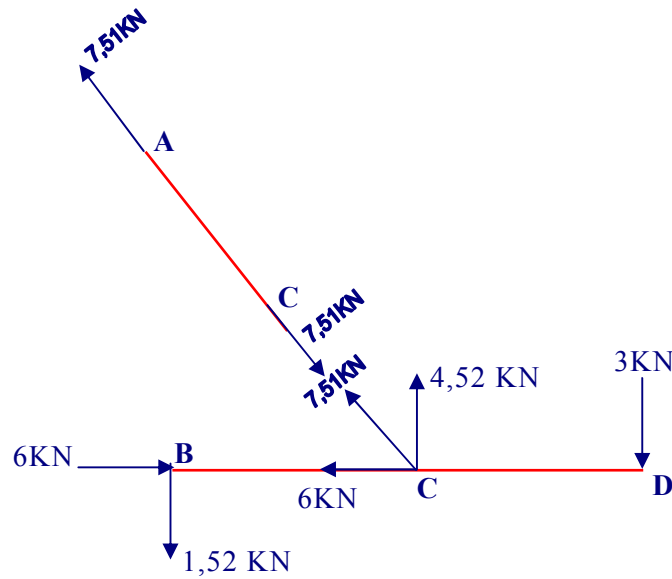
$$\bar{\Sigma} F_x = 0$$

$$A_x - B_x = 0$$

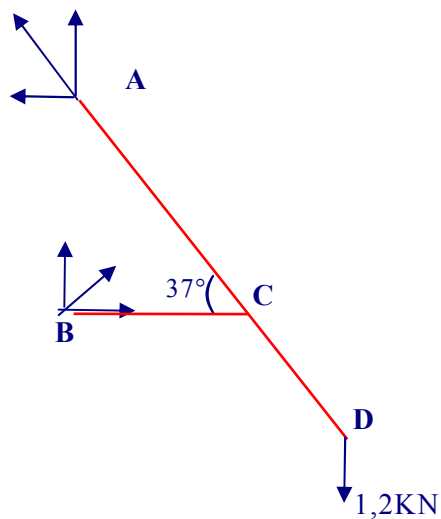
$$A_y = B_x -$$

$$B_y = 6 \text{ KN}$$

Fuerzas que actúan en c/barra.



3) DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE TODA LA ESTRUCTURA.



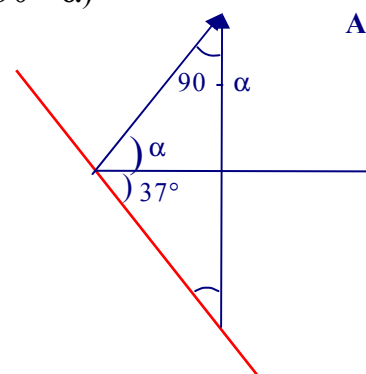
$$\frac{B_y}{B_x} = \tan \alpha$$

$$B_y = \tan \alpha B_x$$

$$\tan \alpha B_x - A_y = 1.2$$

$$1:0 - \alpha - 37 - 53$$

$$(90 - \alpha)$$



PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

1. En un cuerpo en equilibrio de reposo o de movimiento ($v = \text{constante}$)

Se cumplen:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum F_0 = 0$$

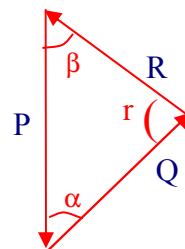
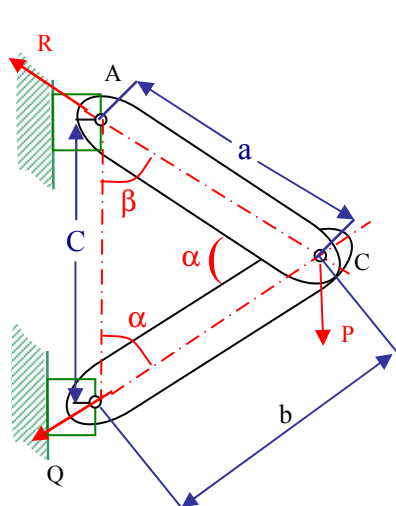
$$\sum F \text{ en cualquier direcci3n} = 0$$

solo para el equilibrio est3tico.

(Respecto a cualquier punto)

(preferentemente se toman los puntos donde hay fuerzas desconocidas).

2. Cuando en un cuerpo o estructura actúan 3 fuerzas NO COLINEALES dichas fuerzas forman un triángulo y además pasan por un mismo punto.

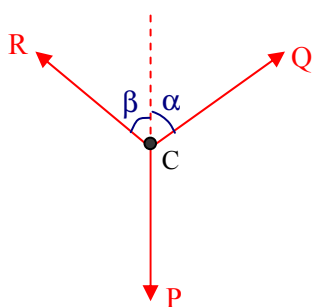


$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \beta}$$

Tambi3n:

$$\frac{P}{C} = \frac{R}{a} = \frac{Q}{b}$$

3. Equilibrio del nudo:



Por ejemplo nudo "C".

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum M_0 = 0$$

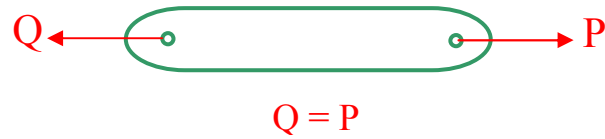
$$-R \sin \beta + Q \sin \alpha = 0$$

No se puede aplicar.

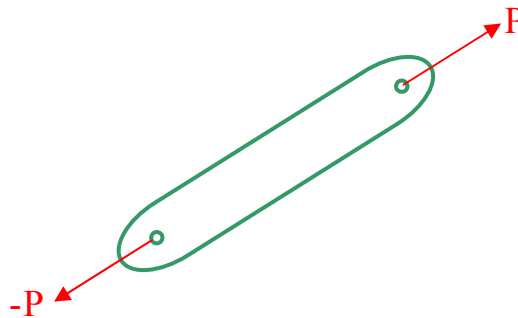
$$\sum F_y = 0$$

$$-R \sin \beta + Q \sin \alpha = 0$$

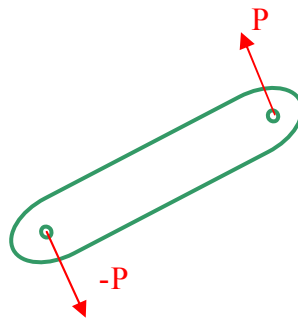
4. Las fuerzas actúan en pares.



5. Si en una barra actúan fuerzas solo en ambos extremos dichas fuerzas son colineales con la barra (actúan en el eje de la barra).



NO SE ACEPTA EL SGT ESQUEMA

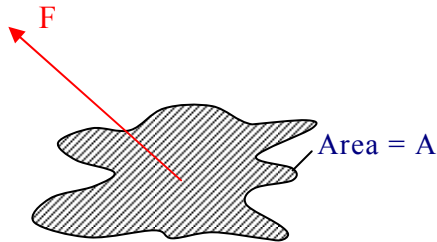


Aquí la barra estaría girando en sentido antihorario.

CAPÍTULO II

ESFUERZO Y DEFORMACIONES

ESFUERZO:



Unidades

$$\frac{\text{Lbs}}{\text{Pu lg}^2} = \text{Psi.}$$

Sistema Ingles.

$$\text{Esfuerzo} = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Area}}$$

$$\frac{\text{Kg - f}}{\text{cm}^2}$$

Sistema Métrico.

$$\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa}$$

Sistema Internacional

MÚLTIPLOS:

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ GPa} = 10^3 \text{ MPa}$$

Equivalencias:

$$1 \text{ MPa} = 145 \text{ Psi.}$$

$$1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$$

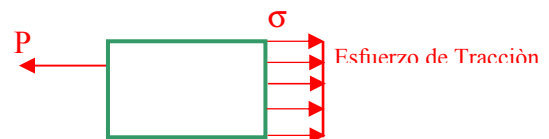
$$1 \text{ MPa} = \frac{10 \text{ Kg - f}}{\text{cm}^2}$$

CLASES DE ESFUERZOS

1) Esfuerzos Normales



1.1 Tracción o Compresión:



$$\sigma = \frac{P}{A}$$

σ : Se lee sigma

σ : esfuerzo de tracción

P : Fuerza

A : Area de la sección transversal.

Ejemplo:

$$P = 5 \text{ KN}$$

$$A = 200 \text{ mm}^2$$

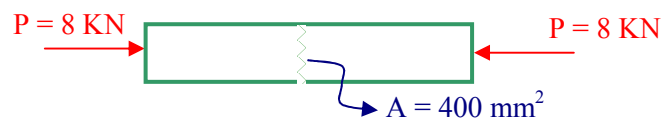
$$\sigma = \frac{5000 \text{ N}}{200 \text{ mm}^2} \rightarrow$$

$$\sigma = 25 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = 25 \text{ MPa}$$

Significa que: En cada mm^2 actúa una fuerza de 25 N

Cuando es compresión:



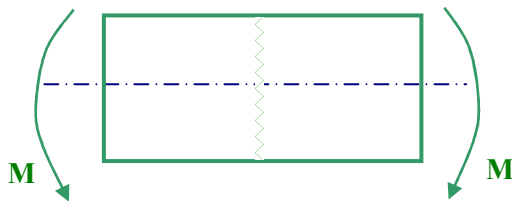
$$\sigma = (-) \frac{8000 \text{ N}}{400 \text{ mm}^2}$$

$$\sigma = 8 \rightarrow 20 \text{ N/mm}^2$$

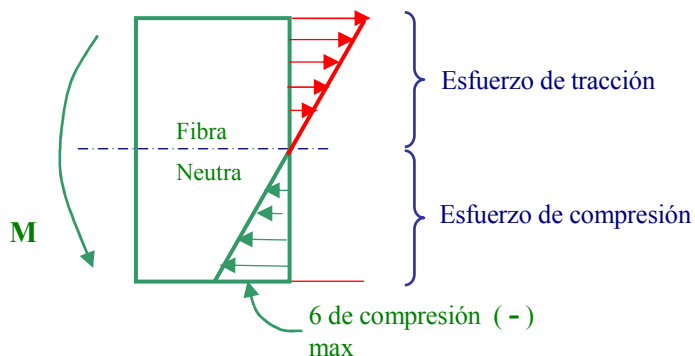
$$= (-) 20 \text{ MPa}$$

Significa que: En cada mm^2 actúa una fuerza de 20 N.

1B Esfuerzos de flexión:

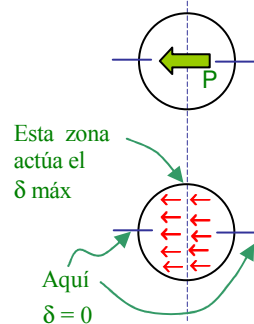
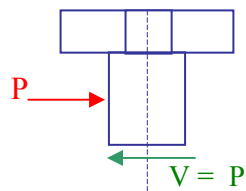
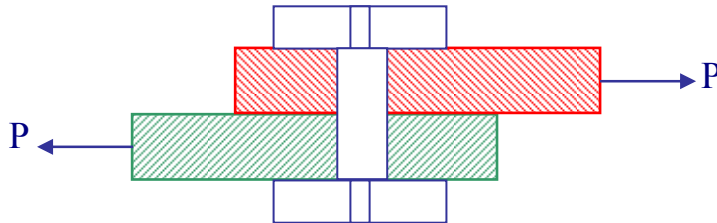


M = momento flector



(2) Esfuerzos cortantes o tangenciales:

2.A Directos o Ciballadura.



δ = Se lee Tau

δ = Esfuerzo Cortante

$$\delta = \alpha \frac{V}{A}$$

V = Coeficiente

A = Área

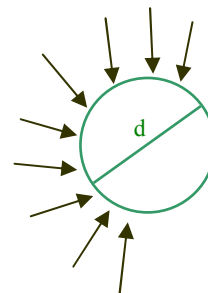
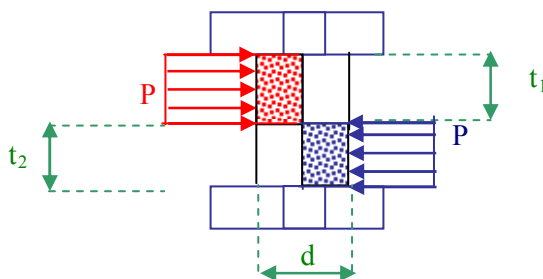
α = Coeficiente

$= \frac{4}{3}$ para sección circular.

$= \frac{3}{2}$ para sección rectangular.

ESFUERZO DE APLASTAMIENTO:

Es un esfuerzo de compresión en la zona de contacto de 2 elementos. Tomando el perno de la figura anterior.



$$Galast = \frac{P}{Area \text{ proyectada}}$$

$$\text{Gaplast} = \frac{P}{\phi t.}$$

Area de un rectángulo.

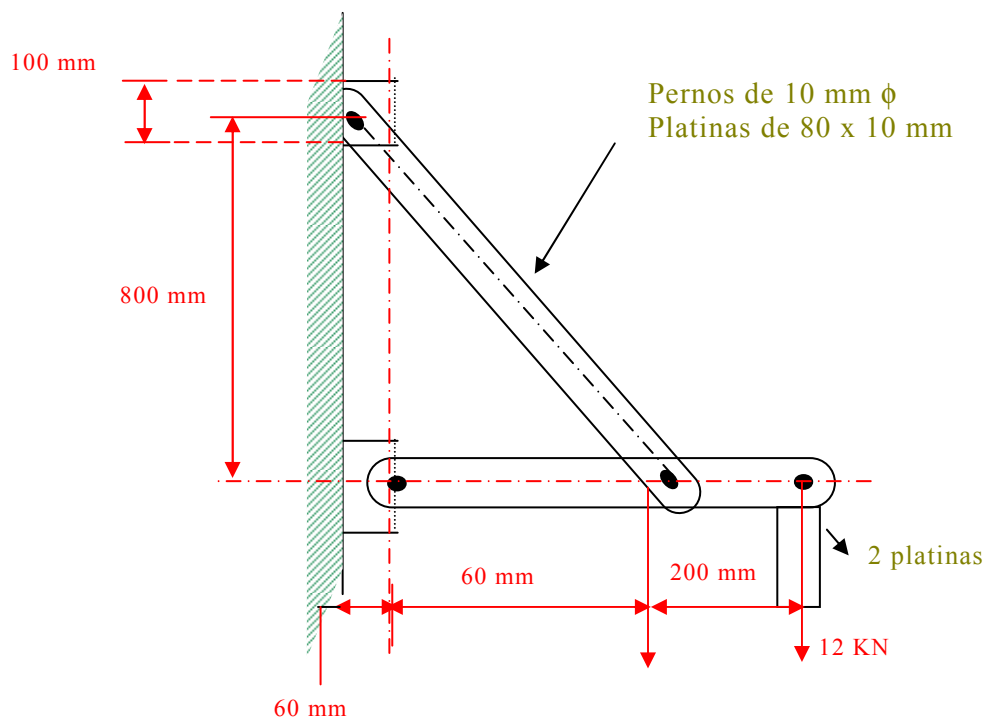
En la zona de contacto del perno con la plancha superior.

$$\text{Gaplast} = \frac{P}{d - t_2}$$

En la zona de contacto del perno con la plancha inferior.

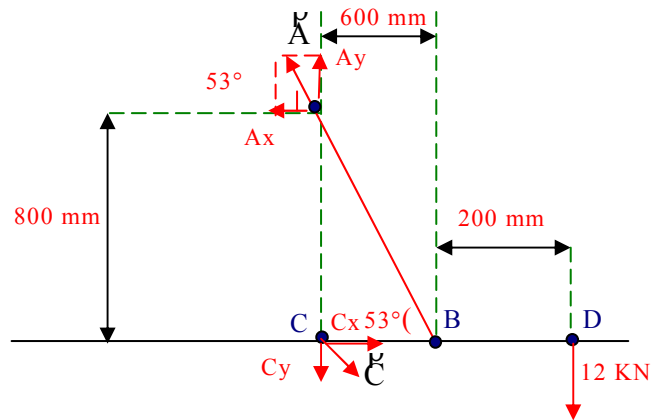
PROBLEMA N° 1

Calcular los esfuerzos de tracción Y/o compresión en las barras, los esfuerzos cortantes directos en los pernos y los esfuerzos de aplastamiento en los pernos y agujeros de la estructura.



Solución:

Calculo de Reacciones:



Trabajando con componentes:

$$\Sigma M_0^C = 0$$

$$12 \text{ kN} \cdot 800 \text{ mm} - A_x \cdot 800 \text{ mm} = 0$$

$$A_x = 12 \text{ kN}$$

$$A_y = A_x \tan 53^\circ$$

$$A_y = 12 \text{ kN} \cdot \frac{4}{3}$$

$$A_y = 16 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-A_x + C_x = 0$$

$$C_x = A_x$$

$$C_x = 12 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_y = 0$$

$$A_y - C_y - 12 \text{ kN} = 0$$

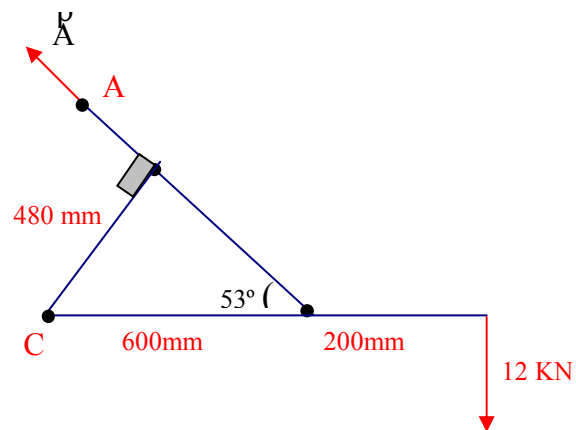
$$16 \text{ kN} - 12 \text{ kN} = C_y$$

$$C_y = 4 \text{ kN}$$

2DA FORMA:

Calculo: de $\bar{K}$

$$\Sigma M_0^C = 0$$

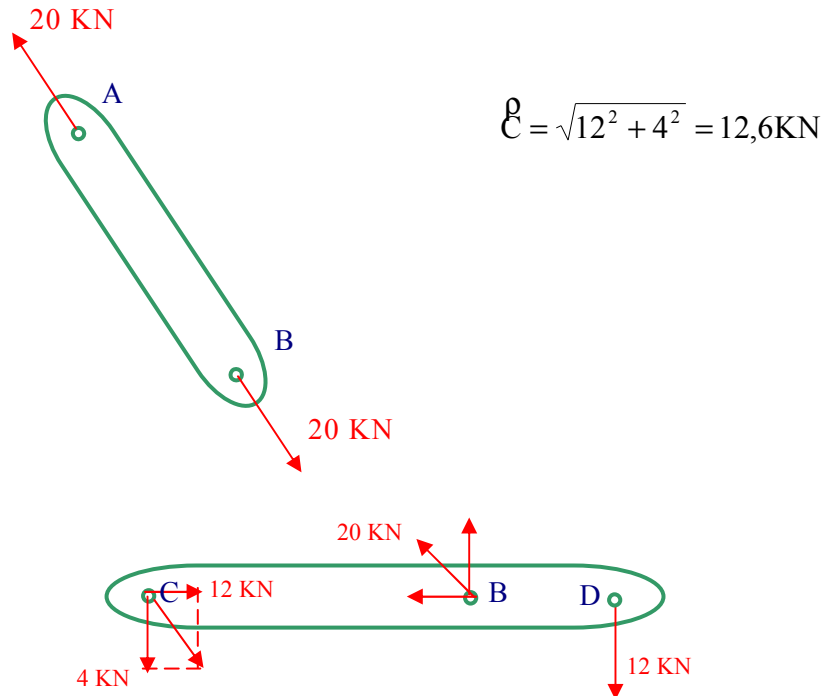


$$A \cdot 480 \text{ mm} - 12 \text{ kN} \cdot 800 \text{ mm} = 0$$

$$A = 12 \text{ kN} \cdot 800 \text{ mm} / 480 \text{ mm} = 20 \text{ kN}$$

480 m.

FUERZAS EN CADA BARRA:



GRAFICANTE

Escala: 6 mm = 2 KN

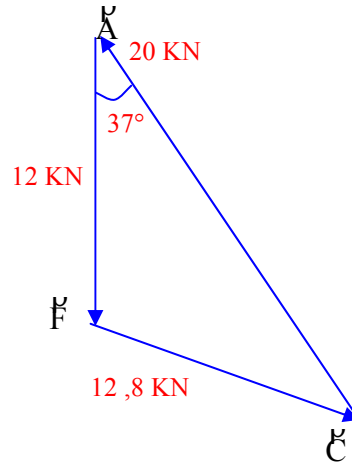
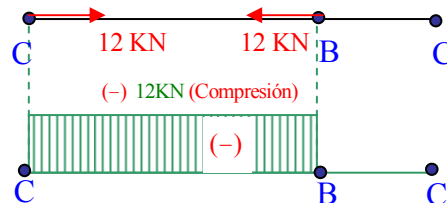
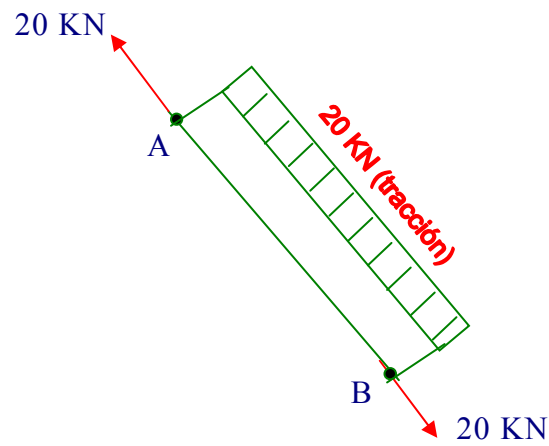


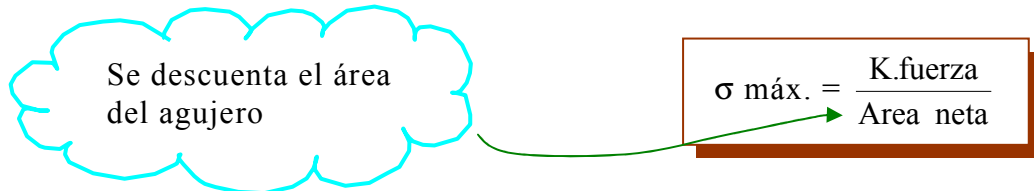
DIAGRAMA DE CARGAS AXIALES:



ESFUERZOS DE COMPRESION Y/O TRACCION

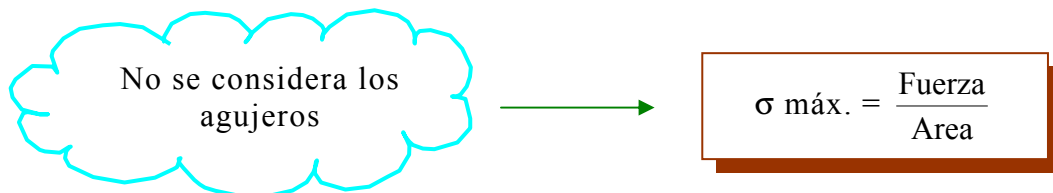
La sección más débil es aquella donde hay agujeros.

Para esfuerzos de tracción:



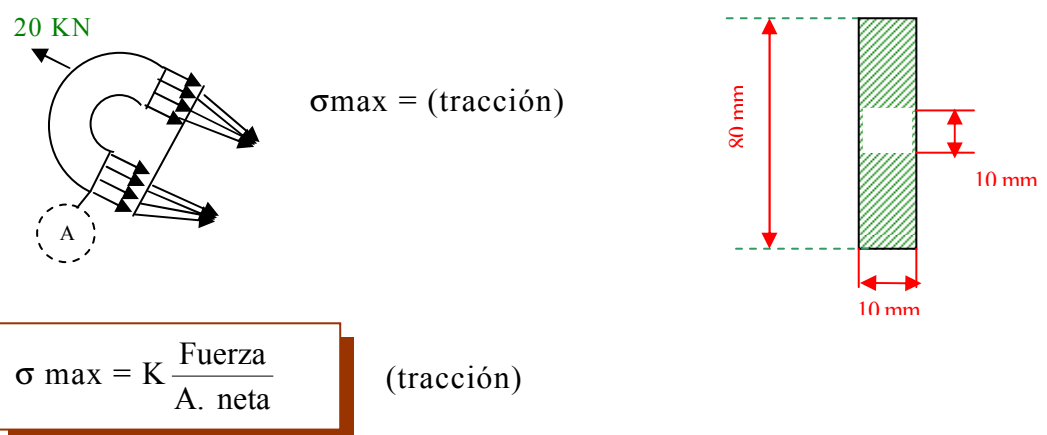
Donde K: Factor de concentración de esfuerzos cuando hay agujeros o cambio de sección.

Para esfuerzos de compresión:



BARRA AB

Sección A. Sección B (Son críticos los más débiles porque tienen agujeros).



Asumiendo $K = 2$

$$\sigma_{\text{máx.}} = 2 \cdot \frac{20000\text{N}}{(80-10)10\text{mm}^2} = 57,14\text{N/mm}^2 = 57,14\text{MPa}.$$

BARRA CBD:

Hay compresión:

$$\sigma_{\text{máx.}} = (-) \frac{1200\text{N}}{80 \times 10\text{mm}^2} = (-)15\text{N/mm}^2 = (-)15\text{MPa}.$$

PERNO A:

$$\sigma_{\text{max}} = \alpha \frac{V}{A}$$

$\alpha = 4/3$ para sección circular.

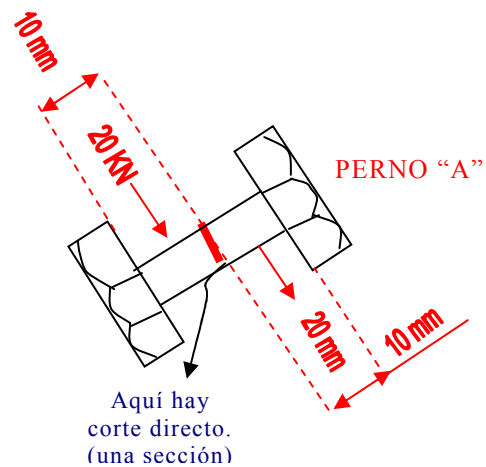
V = Fuerza cortante = 20 kN

A = área de la sección.

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (5\text{ mm})^2$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{20000\text{N}}{\pi(5\text{mm})^2}$$

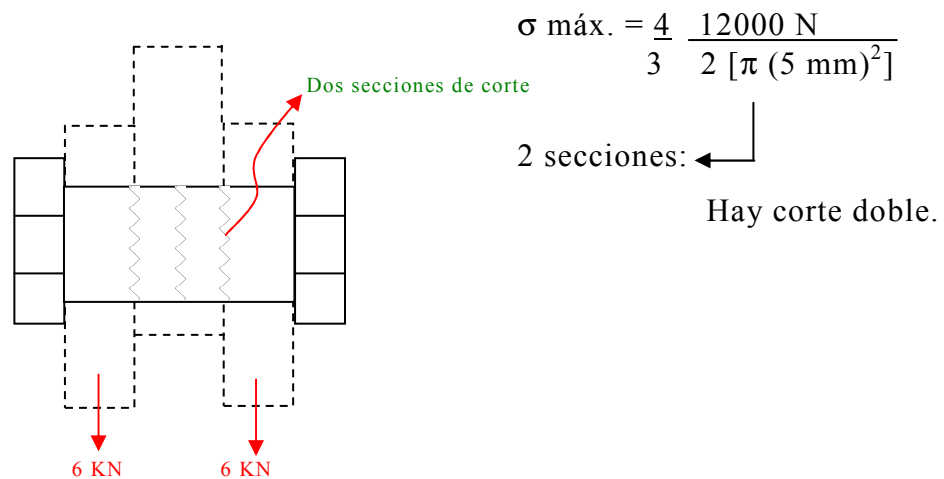
$\sigma_{\text{max}} =$



PERNO B:

$\sigma_{\text{máx.}}$ = qué en "A"

PERNO D:



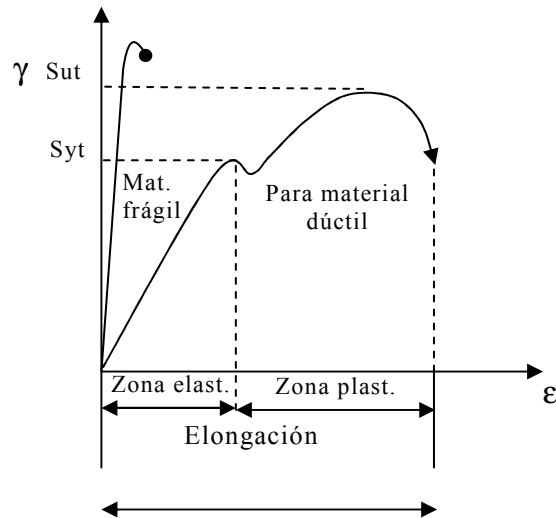
RESISTENCIA DE MATERIAL:

Las diferentes resistencias de los materiales se obtienen en los ENSAYOS DE LABORATORIO.

Resistencia Obtenidas:

- Límite de fluencia a la tracción S_y y $T = S_y$.
- Límite de fluencia a la compresión S_y y C
- Límite de rotura a la tracción S_u y $t = S_u$.
- Límite de rotura a la compresión S_{uc}
- Límite de fluencia al corte S_{sy}
- Límite de rotura al corte S_{su}

ENSAYO DE TRACCIÓN PURA



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

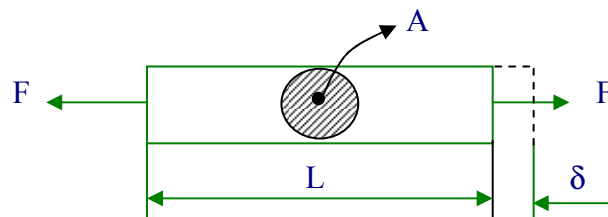
σ = Esfuerzo; F = fuerza.

A = Área

ϵ = deformación unitaria

δ = estiramiento

L = Longitud original.



ELONGACIÓN: Es el valor de “ ϵ ” cuando la proveta llega a la rotura.

Para material dúctil como: Acero, Cobre, Zinc, Aluminio , etc.

$$\epsilon > 5 \%$$

$$\epsilon > 0,05$$

Para material frágil como: Fierro fundido.

$$\epsilon \leq 5 \%$$

$$\epsilon \leq 0,05$$

De los ensayos se ha obtenido:

Para material dúctil:

$$\begin{aligned} S_{yt} &= S_{yc} = S_y \\ S_{ut} &= S_{uc} = S_u \end{aligned}$$

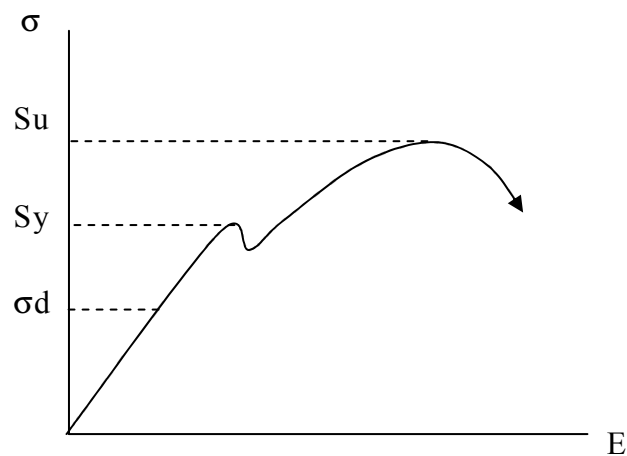
Para material frágil:

$$\begin{aligned} S_y &: \text{No existe} \\ S_{ut} &= S_{uc} = S_u \end{aligned}$$

También en los ensayos de corte

$$S_{sy} = 0,6 S_y$$

ESFUERZO DE DISEÑO Y FACTOR DE SEGURIDAD



σ_d = esfuerzo de diseño

σ_{max} = esfuerzo máximo

σ_d = esfuerzo de trabajo

$\sigma_{adm.}$ = esfuerzo admisible ó permisible

$$\sigma_d = \sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_t = \sigma_{adm}$$

FACTOR DE SEGURIDAD: (F.s)

Para un material dúctil:

- Respecto a la fluencia

$$F.S. = \frac{S_y}{\sigma_{\max}}$$

- Respecto a la rotura

$$F.S. = \frac{S_u}{\sigma_{\max}}$$

- Cuando se trata de esfuerzos cortantes el factor de seguridad al corte es:

$$F.S. = \frac{S_{sy}}{\sigma_{\max}} = \frac{0,6S_y}{\sigma_{\max}}$$

$$\delta_{\max.} = \text{Cortante máx.} \\ \delta_{\max.} = \delta_{\text{admisible}} =$$

Para material frágil

Factor de seguridad para la tracción

$$F.s = \frac{S_{ut}}{\sigma_{\text{máx.t}}}$$

Factor de seguridad para la compresión

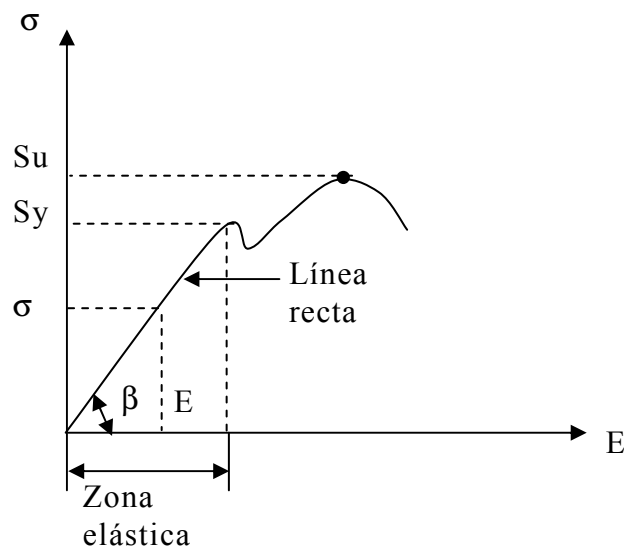
$$F.s = \frac{S_{uc}}{\sigma_{\text{máx.c}}}$$

Donde: $\sigma_{\text{máx.}} \Rightarrow$ Esfuerzo máx. de tracción.

$\sigma_{\text{máx.}} \Rightarrow$ Esfuerzo máx. de compresión.

$$1,5 \leq F.s \leq 4 \text{ a } 6 \dots 15$$

ESTUDIO DE LAS DEFORMACIONES:



En la zona elástica se cumple la Ley de Hooke que dice.

El esfuerzo es directamente proporcional (D.P) a la deformación unitaria.

$$\sigma \text{ D.P.} = \xi$$

También se escribe:

$$\sigma \propto \xi$$

α = alfa

α : Significa directamente proporcional

La relación matemática es:

$$\sigma = E \xi$$

σ : esfuerzo

ξ : deformación interior.

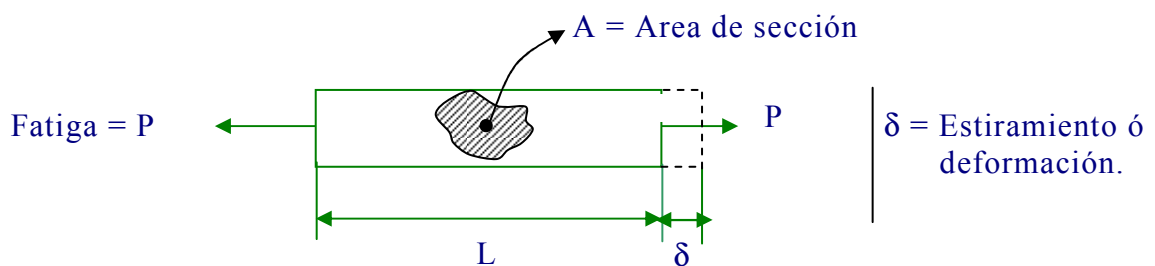
E = Modulo de elasticidad ó Mod. de Young.

E = 200 GPa ó 200×10^3 MPa para aceros

yes = 110 GPa ó $110 \cdot 10^3$ MPa para cobre.

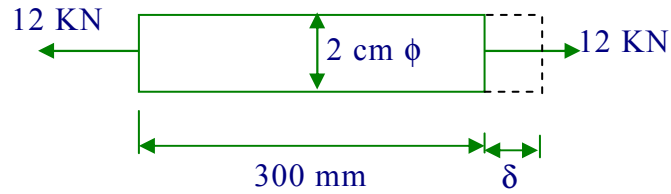
Siendo:

$$\sigma = \frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L} \rightarrow \delta = \frac{P \times L}{E \times A}$$



PROBLEMA N° 1

Calcular la deformación que se produce en la barra de acero.



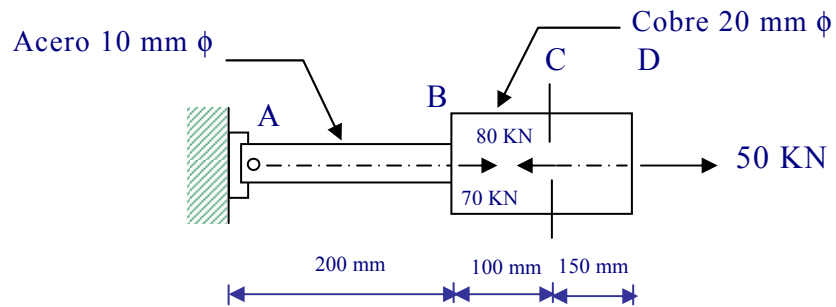
Solución:

$$\delta = \frac{PL}{EA} = \frac{(12000\text{N})(300\text{mm})}{\left(200 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)(\pi(10\text{mm})^2)}$$

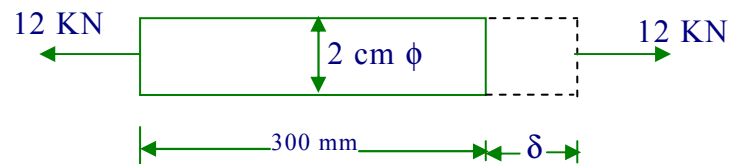
$$\delta = 0,0573\text{mm}$$

PROBLEMA N° 2

Calcular la deformación total de la barra



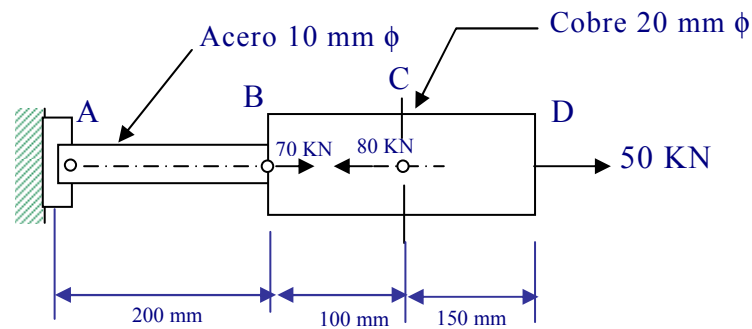
Problema: Calcular la deformación que se produce en la barra.



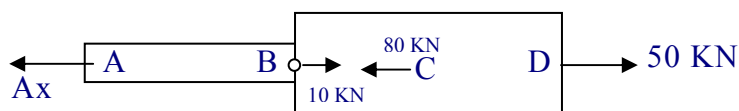
$$\text{Sol: } \delta = \frac{PL}{EA} = \frac{(12000\text{N})(300\text{mm})}{\left(200 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)(\pi(10\text{mm})^2)}$$

$$\delta = 0,0573 \text{ m.m.}$$

Prob.: Calcular la deformación total de la barra.



Solución: D.C.L. de la barra y reacción en A.



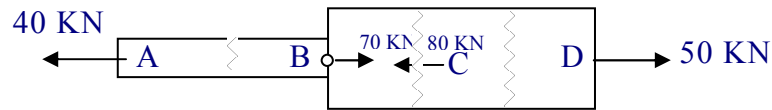
$$\sum F_x \Rightarrow A_x = 40\text{KN}$$

Deformación de la barra

$$\delta_{AD} = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\delta_{AD} = \frac{P_{AB} \cdot L_{AB}}{E_{AB} A_{AB}} + \frac{P_{BC} \cdot L_{BC}}{E_{BC} A_{BC}} + \frac{P_{CD} \cdot L_{CD}}{E_{CD} A_{CD}} \quad \dots\dots\dots (2)$$

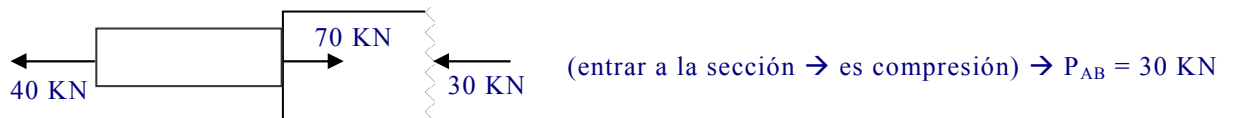
DIAGRAMA DE CARGAS AXIALES



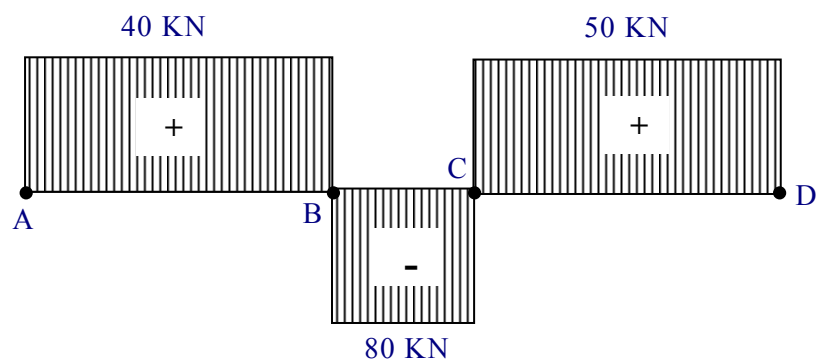
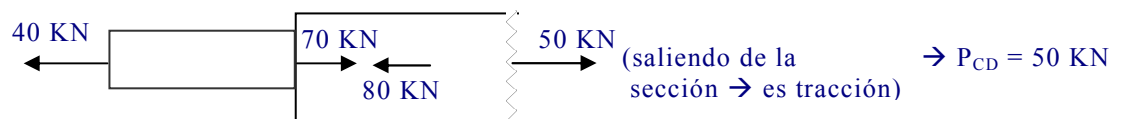
TRAMO: AB.



TRAMO: BC.



TRAMO: CD.



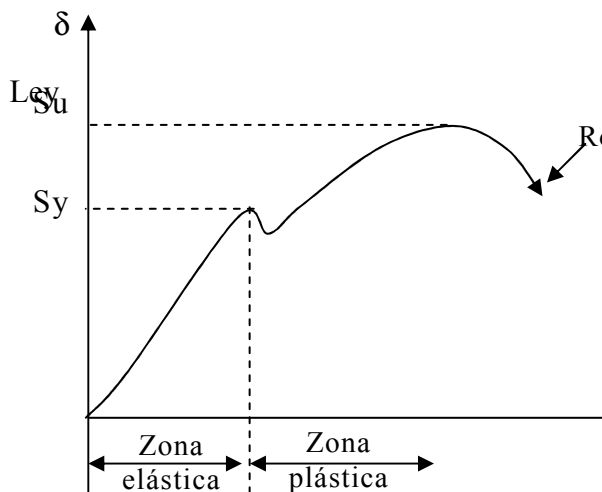
Reemplazando en (2)

$$\delta_{AD} = \frac{(40 \cdot 10^3 \text{ N})(200 \text{ mm})}{\left(200 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)(\pi \cdot 5^2 \text{ mm}^2)} + \frac{(-30 \cdot 10^3 \text{ N})(100 \text{ mm})}{\left(10 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)(\pi \cdot 10^2 \text{ mm}^2)} + \frac{(50 \cdot 10^3 \text{ N})(150 \text{ mm})}{\left(110 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)(\pi \cdot 10^2 \text{ mm}^2)}$$

$$\delta_{AD} = 0,6395 \text{ mm}$$

- Chequeo: Si la barra está dentro del rango elástico del material.

DIAGRAMA DE TRACCION



En la zona elástica se cumple la

$$\sigma = E \cdot \xi$$

Y por lo tanto la fórmula de la
“PELEA”

$$\delta = \frac{P.L.}{EA}$$

Luego: Si el esfuerzo σ que actúa en sección es igual o mayor que el límite de fluencia S_y la fórmula de la pelea NO SE CUMPLE.

Osea todos los cálculos de deformaciones no valen.

En el tránsito AB (acero).

$$\text{Esfuerzo } \sigma_{AB} = \frac{F}{A} = \frac{4000 \text{ N}}{\pi \cdot 5^2 \cdot \text{mm}^2}$$

$$\sigma_{AB} = 509,29 \text{ MPa.}$$

Si el acero es corriente o estructural $S_y = 250 \text{ MPa}$; los cálculos hechos no valen.

$$509,29 \text{ MPa} > 250 \text{ MPa}.$$

Luego el acero de esta barra debe tener $S_y \gg 509,29 \text{ MPa}$.

En el tramo co Cobrex

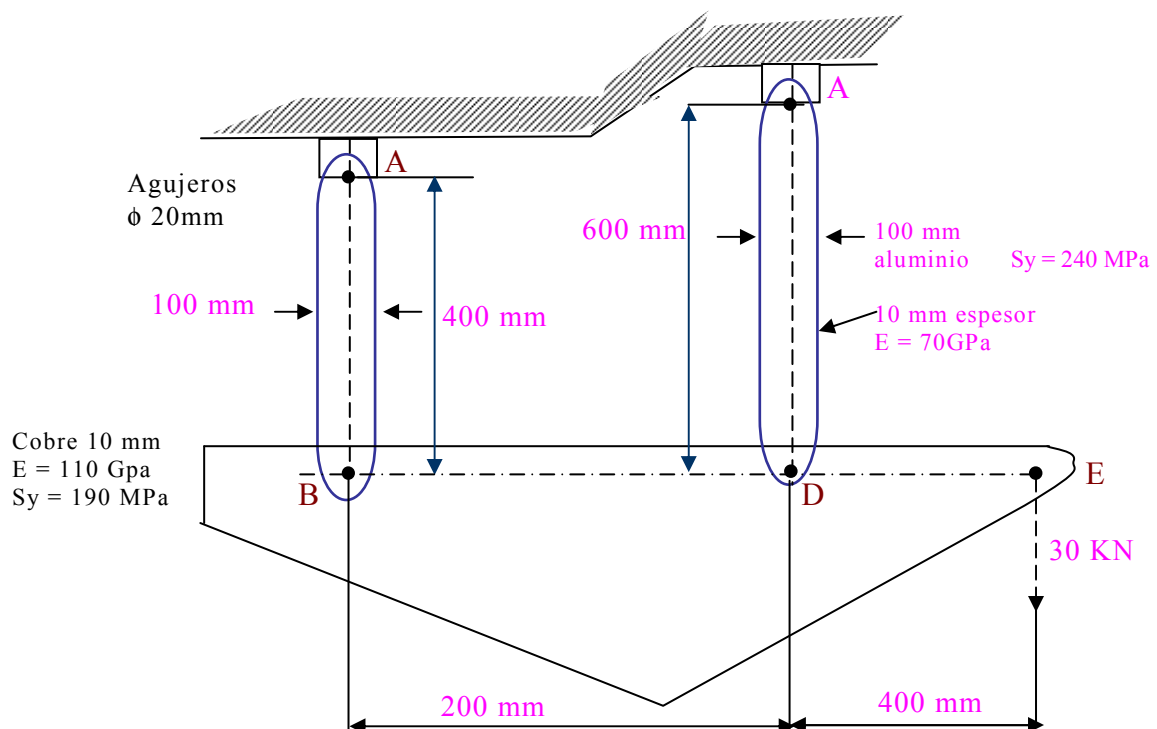
$$\sigma_{CD} = \frac{5000 \text{ N}}{\pi \cdot 10^2 \text{ mm}^2} = 159,15 \text{ MPa}.$$

Para los cálculos sean válidos el cobre debe tener $S_y > 159,159 \text{ MPa}$.

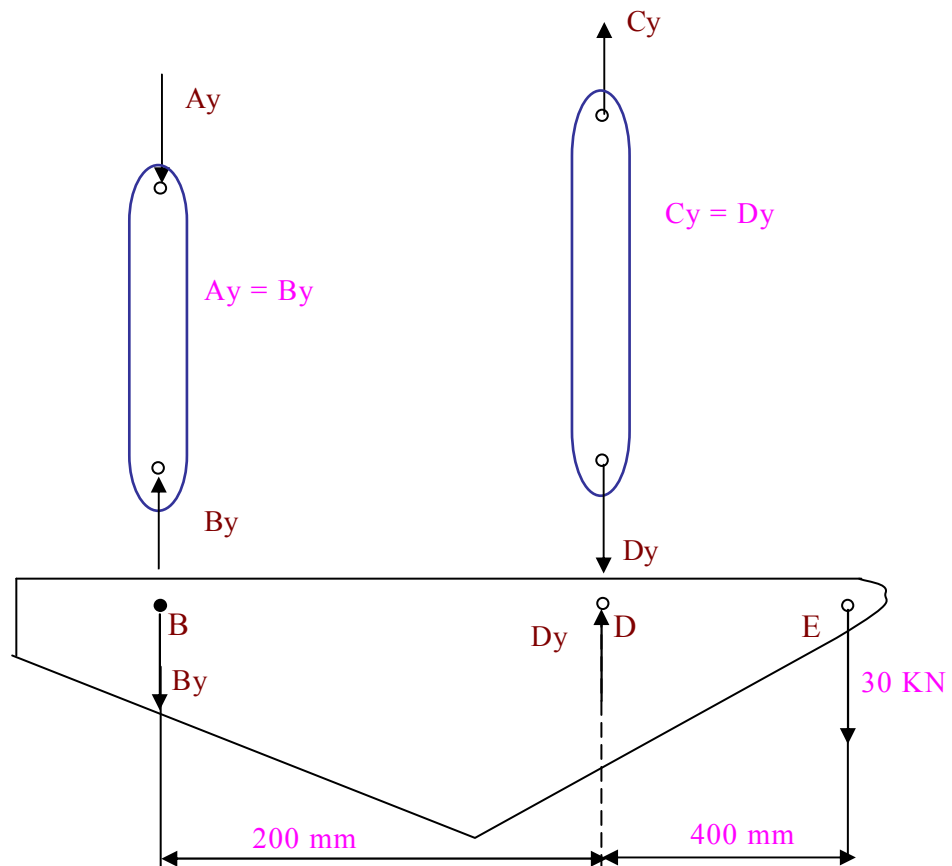
Nota: El S_y del cobre es como 190 MPa.

PROBLEMA N° 3

Calcular los esfuerzos de tracción de compresión en las barras verticales. Así como las deflexiones de los puntos B,D,E,. La barra BDE es rígida (No se deforma). Para esfuerzos de tracción. Considerar $K = Z$.



D.C.L. De toda la estructura.



EN LA BARRA BDE

Hay 2 incógnitas: B_y , D_y

Necesito 2 ecuaciones de la ESTÁTICA.

$$\sum M_0^B = 0 \dots\dots (1)$$

$$30 \text{ kN} \times 600 \text{ mm} - D_y \times 200 \text{ mm} = 0$$

$$D_y = 90 \text{ kN}$$

$$\sum M_y = 0 \dots\dots (2)$$

$$B_y - 90 \text{ kN} + 30 \text{ kN} = 0$$

$$B_y = 60 \text{ kN}$$

ESFUERZOS:

BARRA AB:

$$\sigma_{AB} = (-) \frac{60 \cdot 10^3 \text{ N}}{100 \cdot 10 \text{ mm}^2}$$

$$\sigma_{AB} = (-) 60 \text{ MPa} < S_y = 190 \text{ MPa}.$$

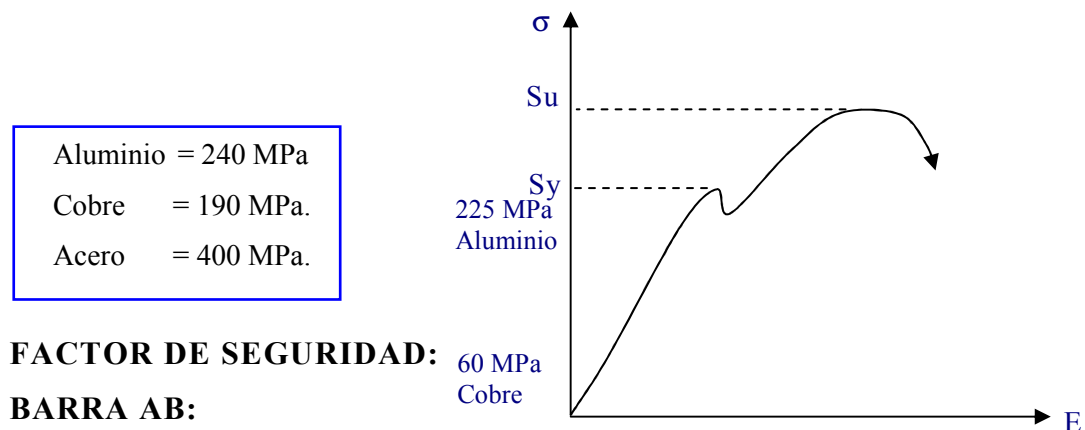
BARRA CD:

$$\sigma_{CD} = (-) 2 \frac{90 \ 000 \text{ N}}{10(100 - 20) \text{ mm}^2}$$

$$\sigma_{CD} = 225 \text{ MPa} < 240 \text{ MPa} = S_y$$

EN LA SIGUIENTE GRÁFICA

SIENDO EN AMBAS BARRAS $\sigma < S_y$
SE CUMPLE LA FORMULA DE LA PELEA

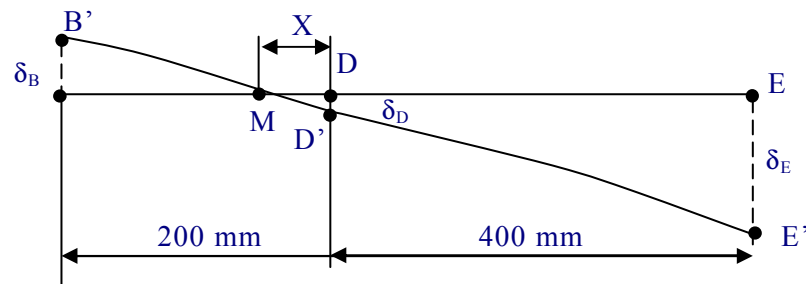


$$F_{sAB} = \frac{S_y}{\sigma_{AB}} = \frac{190}{60} = 3,17$$

Barra CD: $Fs.CD = \frac{S_y}{\sigma_{CD}} = \frac{240}{225} = 1,07$

La barra CD está más cerca de una posible falla por fluencia.

CALCULO DE LAS DEFLEXIONES:



Se asume que los desplazamientos de los puntos B,D,E, son verticales.

“DEFLEXIÓN ES EQUIVALENTE A DESPLAZAMIENTO”.

DEFLEXION DEL PUNTO B = Desplazamiento del punto B

$$= \delta_B$$

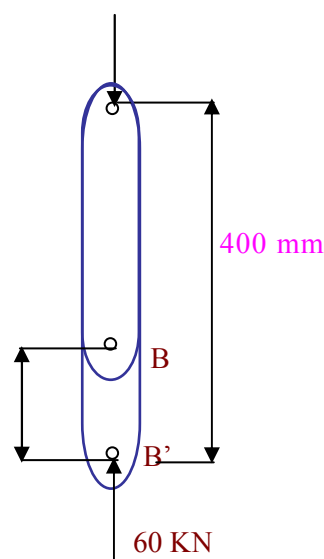
= Deformación de la barra

$$AB = \delta_{AB}$$

$$\therefore \delta_B = \delta_{AB}$$

SIENDO LA PELEA

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$



$$\delta_B = \delta_{AB} = \frac{P_{AB} \times L_{CD}}{E_{CD} \times A_{CD}} \Rightarrow \delta_{CD} = \frac{(60000N)(600mm)}{\left(70 \times 10^3 \frac{N}{mm^2}\right)(100 \times 10 mm^2)}$$

$$\delta_{CD} = 0,7714 mm$$

CALCULO DE δ_E :

CALCULO DE X

$$\text{Tg } \theta = \frac{\delta_B}{200 - x} = \frac{\delta_D}{x}$$

$$\frac{0,2182}{200 - x} = \frac{0,7714}{x}$$

$$154,28 - 0,7714x = 0,2182x$$

$$x = 155,9 \text{ mm}$$

EN LOS TRIANGULOS MEE' Y MDD'

$$\text{Tg } \theta = \frac{\sigma_D}{x} = \frac{\sigma_E}{400 + x}$$

$$\frac{0,7714}{155,9} = \frac{\sigma_E}{400 + 155,9}$$

$$\therefore \delta_E = 2,75 \text{ mm}$$

OJO:

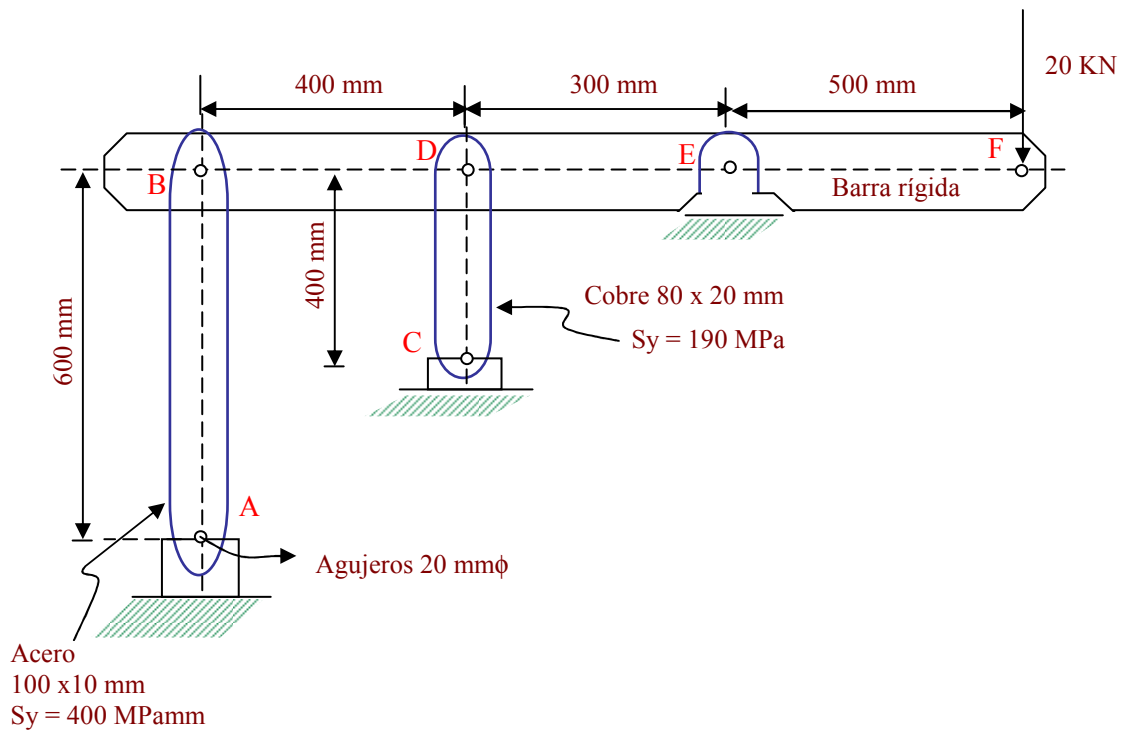
σ_x = desplazamiento de x
 σ_{yx} = deformación de barra yx.

SISTEMAS HIPERESTATICOS:

Ecuaciones de la estática ($\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M_0 = 0$) no son suficientes para resolver el problema y se deben plantear las ecuaciones de desplazamientos:

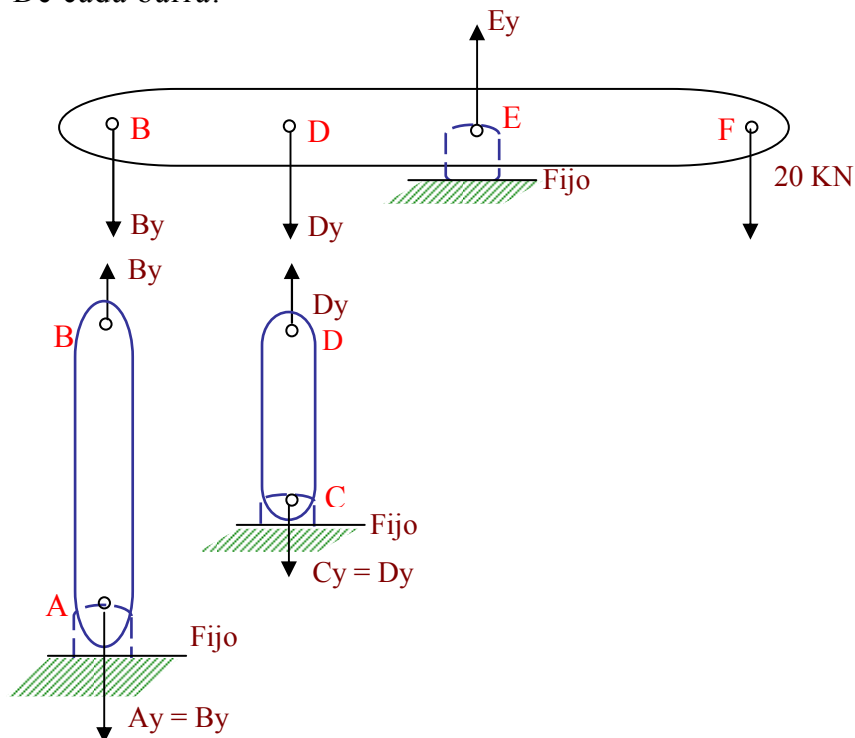
PROBLEMA N° 1

Calcular los esfuerzos en las barra verticales ($K = 2$), los factores de seguridad y los desplazamientos de los puntos B, D y F.



SOLUCION:

D. C. L. De cada barra:



EN LA BARRA B D E F

Hay 3 incógnitas B_y ; D_y , E_y

Se puede plantear.

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_y = 0 \\ \sum M_0 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ ecuaciones} \\ 1 \text{ ecuación de desplazamiento.} \end{array}$$

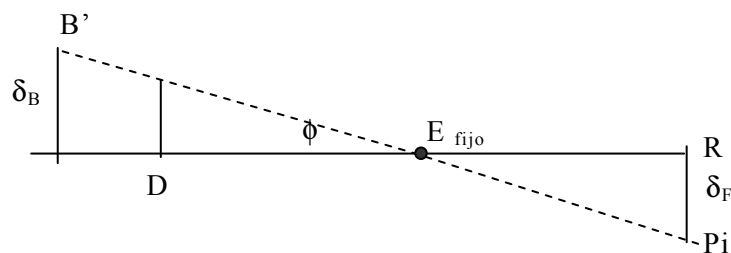
En la barra B D E F

Hay 3 incógnitas: B_y ; D_y ; E_y

$$B_y + D_y - E_y + 20 \text{ KN} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$B_y + 700 + D_y 300 - 20 \text{ KN} \times 500 = 0$$

$$7 B_y + 3 D_y = 100 \text{ KN}$$



$$\text{Tg}\theta = \frac{\delta_B}{700} = \frac{\delta_F}{300}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\delta_B}{700} = \frac{\delta_F}{300} \Rightarrow 3 \delta_B = 7 \delta_F \\ 3 A_B = 7 A_F \end{array} \right\} \text{Usando la regla de la mano muerta}$$

$$3 \frac{P_{AB} \cdot L_{AB}}{E_{AB} \cdot A_{AB}} = 7 \frac{P_{CD} \cdot L_{CD}}{E_{CD} \cdot A_{CD}}$$

$$3 \left(\frac{B_y \times 600 \text{ mm}}{200 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 10 \times 10 \text{ m}^2} \right) = 7 \left(\frac{D_y \times 400 \text{ mm}}{110 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 60 \times 20 \text{ m}^2} \right)$$

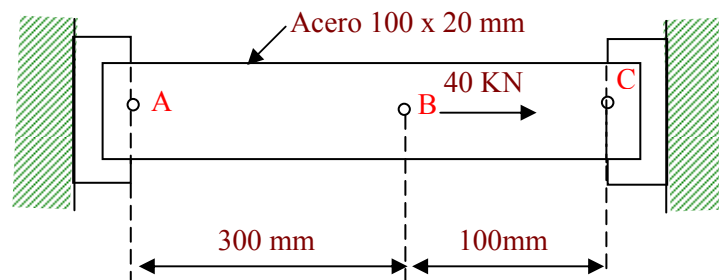
$$9 \times 10^{-6} B_y = 1,6 \times 10^{-5} D_y$$

$$B_y = \frac{1,6 \times 10^{-5}}{9 \times 10^{-6}} D_y$$

$$B_y = 1,78 D_y$$

PROBLEMA N°

Calcular las reacciones en A y C



Solución:

D.C.L.



$$\sum F_x = 0 \quad A_x + C_x - 40 \text{ KN} = 0$$

$$A_x + C_x = 40 \text{ KN} \quad \dots\dots\dots (1)$$

Análisis: Existe una ecuación y 2 incógnitas.
Luego es un problema estáticamente
Indeterminado ó Hiperestático.

Se necesita una ecuación de desplazamiento la cual puede ser la siguiente:
“La deformación de la barra es CERO”.

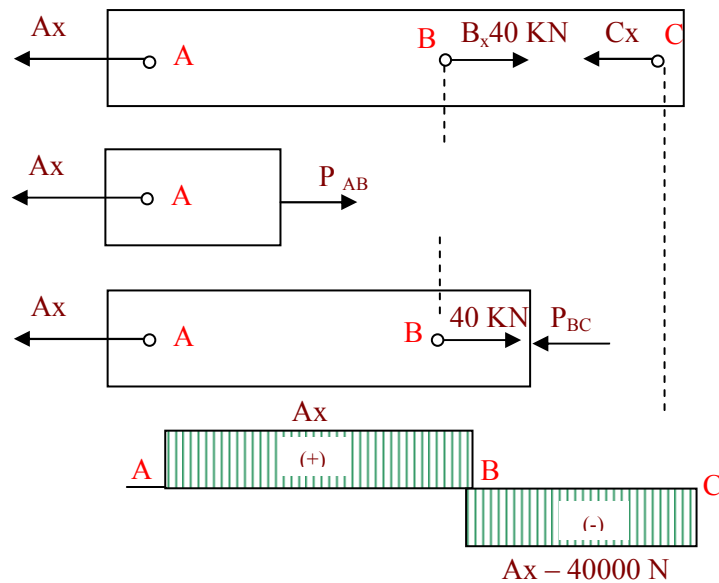
$$\delta_{AC} = 0$$

$$\delta_{AB} + \delta_{BC} = 0$$

Usando la pelea en cada tramo.

$$\frac{P_{AB} \times L_{AB}}{E_{AB} \times A_{AB}} + \frac{P_{BC} \times L_{BC}}{E_{BC} \times A_{BC}} \dots\dots\dots (2)$$

Para las fuerzas P_{AB} y P_{BC} necesitamos el diagrama de cargas axiales.



En tramo AB :

$$\sigma_{AB} = A_X$$

Reemplazamos todos los valores en la ecuación (2)

En Tramo BC:

$$P_{BC} = A_X - 40$$

KN

$$\frac{A_x \cdot 300 \text{ mm}}{\left(200 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right) (100 \cdot 20 \text{ mm}^2)} + \frac{(A_x - 40000)(100 \text{ mm})}{\left(200 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right) (100 \cdot 20 \text{ mm}^2)} = 0$$

$$A_x \cdot 300 \text{ mm} = (-) (A_x - 40000) 100 \text{ mm}$$

$$3A_x = 40\,000 - A_x$$

$$4A_x = 40\,000$$

$$A_x = 10000 \text{ Sentido asumido correcto.}$$

$$C_x = 30000 \text{ N.}$$

COMPROBAMOS SI USTED CUMPLE LA PELEA

Esfuerzo en AB: (Tracción)

$$\sigma_{AB} = \frac{K \cdot P_{AB}}{\text{Area Neta}}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{2 \cdot 10000 \text{ N}}{(100 - 10) 20 \text{ mm}^2} = 11,1 \text{ MPa} \ll \sigma_y = 250 \text{ MPa}$$

ESFUERZO EN BC : (Compresión)

$$\sigma_{BC} = P_{BC}$$

A. Neta

$$\sigma_{BC} = \frac{30000 \text{ N}}{100 \times 20 \text{ mm}^2} = 15 \text{ MPa} \ll \sigma_y = 250 \text{ MPa.}$$

El elemento esta dentro del rango elástico.

∴ Se cumple la pelea.

OBSERVACIONES:

1^{ra} La ecuación (2) se puede simplificar

Siendo: $E_{AB} = E_{BC}$; $A_{AB} = A_{BC}$

La ecuación (2)

$$\frac{P_{AB} \cdot L_{AB}}{E_{AB} \cdot A_{AB}} + \frac{P_{BC} \cdot L_{BC}}{E_{BC} \cdot A_{BC}} = 0$$

$$P_{AB} \cdot L_{AB} + P_{BC} \cdot L_{BC} = 0$$

2^{da} El punto B se desplaza?

Si se desplaza

Calculamos su desplazamiento.

$$\delta_B = \delta_A + \delta_{AB}$$

$$\delta_B = \delta_{AB} \rightarrow \text{La fórmula de la pelea}$$

$$\delta_B = \frac{P_{AB} \cdot L_{AB}}{E_{AB} \cdot A_{AB}}$$

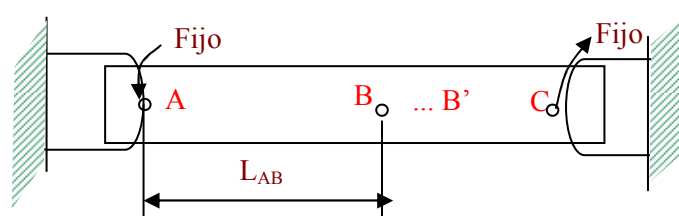
$$\delta_B = \frac{(10\,000\text{N}) \cdot 300\text{ mm}}{200 \cdot \frac{10^3\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 100 \cdot 20\text{ mm}^2}$$

$$\delta_B = 0,0075\text{ mm}$$

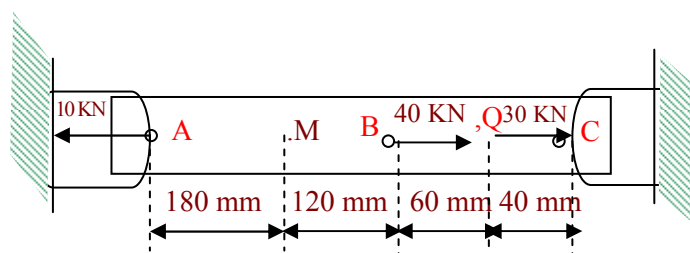
Nota: Cual es la deformación de BC

$$\delta_{BC} = -\delta_{AB} = (-) 0,0075\text{ mm}$$

Se contrae

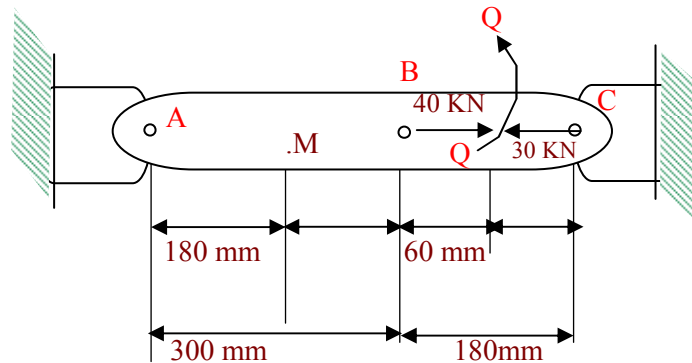


Problema: En el problema anterior calcular el desplazamiento del punto M y Q



Prob:

En el problema anterior calcular el desplazamiento del punto M y Q



Solución:

$$\delta_M = \delta_A + \delta_{AM}.$$

$$\delta_M = \delta_{AM}.$$

$$\delta_M = \frac{(10000 \text{ N}) (180 \text{ mm})}{200 \times 10^3 \text{ N/m}^2 (100 \times 20 \text{ mm})}$$

$$\text{También: } \delta_M = \delta_B \cdot \frac{180 \text{ mm}}{300 \text{ mm}} =$$

$$* \delta_a = \delta_A + \delta_{AQ}.$$

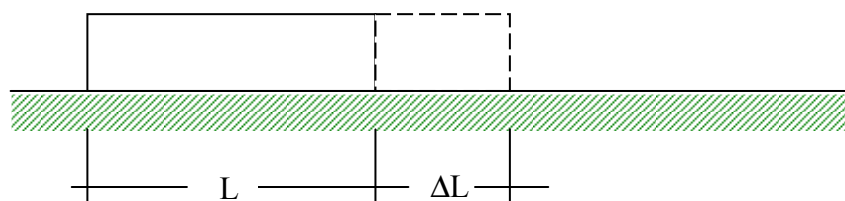
$$P_{AB} = 10000 \text{ N}$$

$$P_{BQ} = (-) 30000 \text{ N}$$

$$\delta_Q = \delta_{AB} = \delta_{AB} + \delta_{BQ}$$

ESFUERZOS TERMICOS

Concederemosxx una barra libre, la cual calentamos un $\Delta T^\circ\text{C}$.



La dilatación lineal esta dado por

L = Longitud original de la barra.

ΔT = cambio de temperatura

α = Coeficiente de dilatación lineal.

$= 12 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$ (Acero)

$= 18 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$ (Cobre)

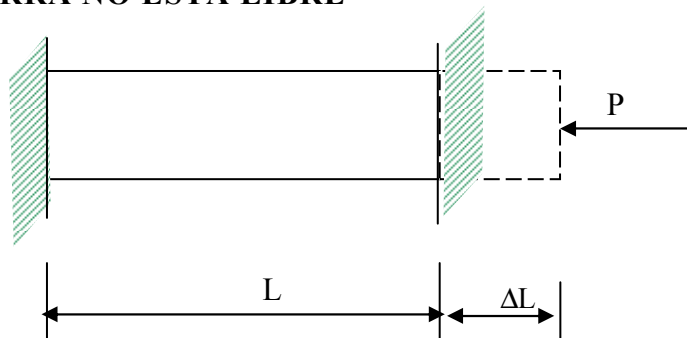
De La Formula (1)

$$\left(\frac{\Delta L}{L} \right) = \alpha \cdot \Delta T$$

$$\boxed{\epsilon_T = \alpha \cdot \Delta T} \dots\dots\dots(2)$$

Donde $\epsilon_T = \frac{\Delta L}{L}$ es la deformación unitaria térmica

AHORA SI LA BARRA NO ESTA LIBRE



Aparece una fuerza P que impide que la barra se deforme “ ΔL ” es equivalente decir que la fuerza produce la deformación “ ΔL ” y por la PELEA.

$$\Delta L = \delta = \frac{PL}{EA}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{P}{E.A.}$$

$$E_T = \frac{P}{E.A.}$$

Por la ecuación (2)

$$\alpha.\Delta T = \frac{P}{E.A.}$$

$$E.\alpha.\Delta T = \frac{P}{A}$$

Pero $\frac{P}{A} = \sigma$ es el esfuerzo anual

$\therefore \boxed{\sigma = E.\alpha.\Delta T}$ (3) Esta es la fórmula del esfuerzos térmico
donde:
E = Módulo de elasticidad del material.

ANALISIS PROPORCIONAL

σ D.P. E

σ D.P. α

σ D.P. ΔT

Prob: Si es barra de acero

$$\Delta T = 80^\circ\text{C}$$

Sol:

$$\sigma = 200 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \times 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot 80^\circ\text{C}$$

$$\sigma = 192 \text{ N/mm}^2 \rightarrow 192 \text{ N/mm}^2 < S_y = 250 \text{ MPa.}$$

Prob: Si la barra de cobre $\Delta T = 100^\circ\text{C}$

Sol:

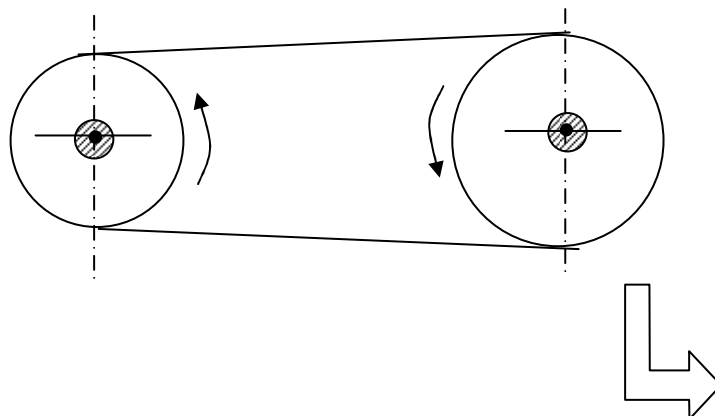
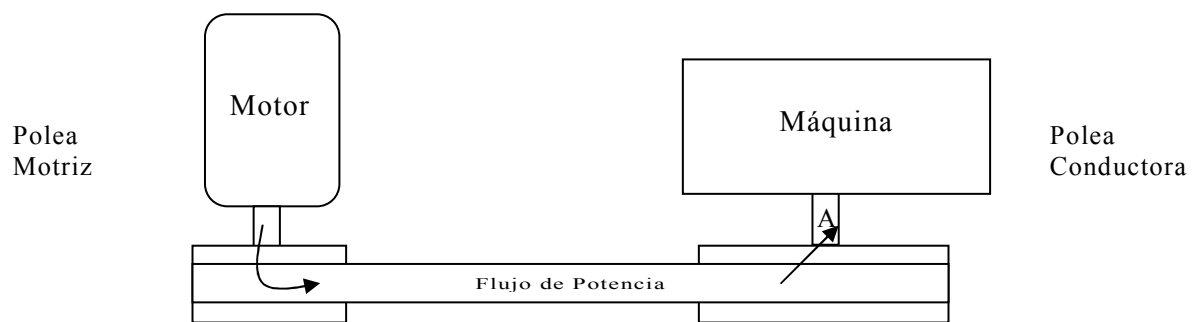
$$\sigma = E \cdot \alpha \cdot \Delta T.$$

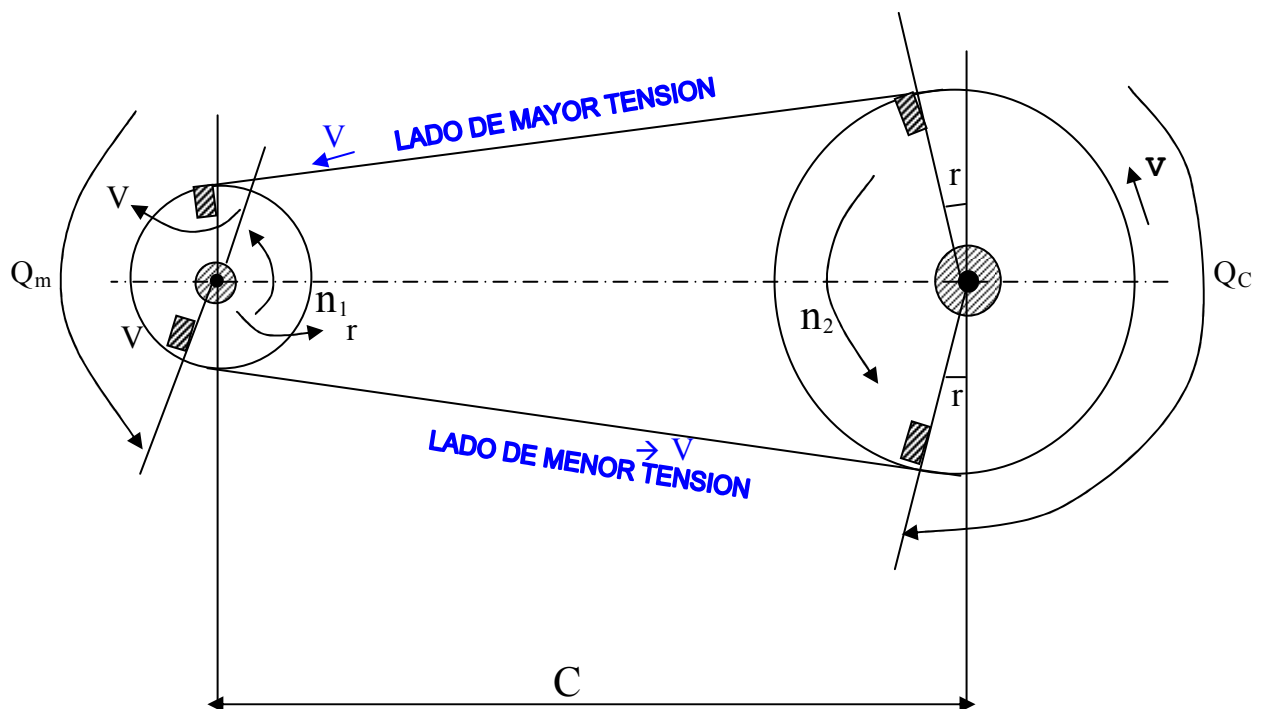
$$\sigma = 110.103 \text{ N/mm}^2 \cdot 18 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}} = 100^\circ\text{C}$$

$$\sigma = 198 \text{ MPa}$$

TRANSMISION DE POTENCIA

1. MEDIANTE FAJAS:





CINEMATICA

n_1 = RPM de la polea motriz.

n_2 = RPM de la polea conducida

$$n_1 > n_2$$

- Relación de Transmisión

$$R_{\text{relación}} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$R_{\text{relación}} \geq 1$$

- Velocidad tangencial

$$V = \frac{\pi d n_1}{6000} = \frac{\pi D n_2}{6000}$$

D_0 D : en (m.m)

V : en (m/seg)

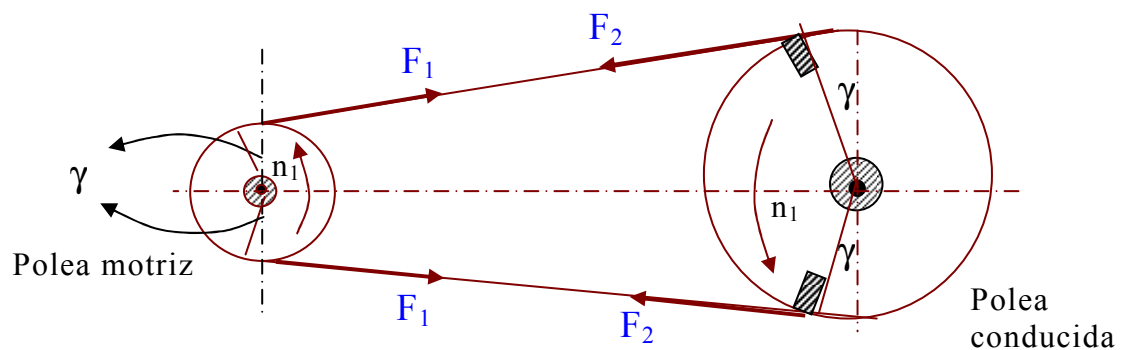
La velocidad tangencial es la misma en las dos poleas:

De la relación anterior se deduce:

$$dn_1 = Dn_1 \Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{n_2} = \frac{D}{d}}$$

Luego la relación de transmisión es:

DINAMICA: Las fuerzas que actúan en cada polea.



- Torque o momento torsion en la polea motriz.

Por equilibrio dinámico el torque que produce el motor es igual al torque de oposición que producen las fuerzas F_1 y F_2 .

$$\text{Torque motriz} = T_m = F_1 \cdot \frac{d}{2} - F_2 \cdot \frac{d}{2}.$$

$$\boxed{T_m = (F_1 - F_2) \frac{d}{2}} \dots\dots\dots (2)$$

RELACIÓN DE TENSIONES

$$\boxed{\frac{F_1}{F_2} = e^{f_{gm} / \sin(\alpha/2)}} \dots\dots\dots (3)$$

f = Coef. De fricción.

θ_m = Angulo de abrazamiento en la polea motriz

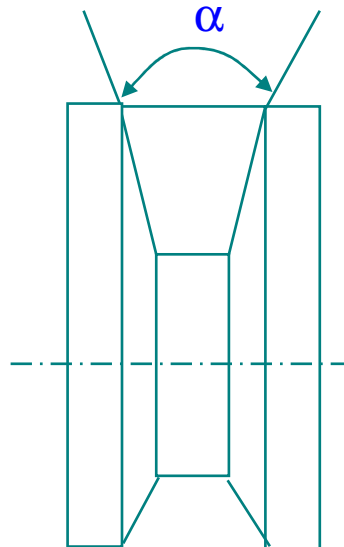
$$\theta_m = \pi \cdot 2\gamma$$

$$\gamma = \sin^{-1}\left(\frac{D-d}{2C}\right)$$

C = Distancia entre centros.

$\alpha = 180^\circ$ para faja plana.

$\alpha = 38^\circ - 42^\circ$ para faja en V.



Relación entre torque y potencia:

$$T_m = \frac{9550000 \cdot (\text{Pot. en kw})}{n_1} \dots\dots\dots(4)$$

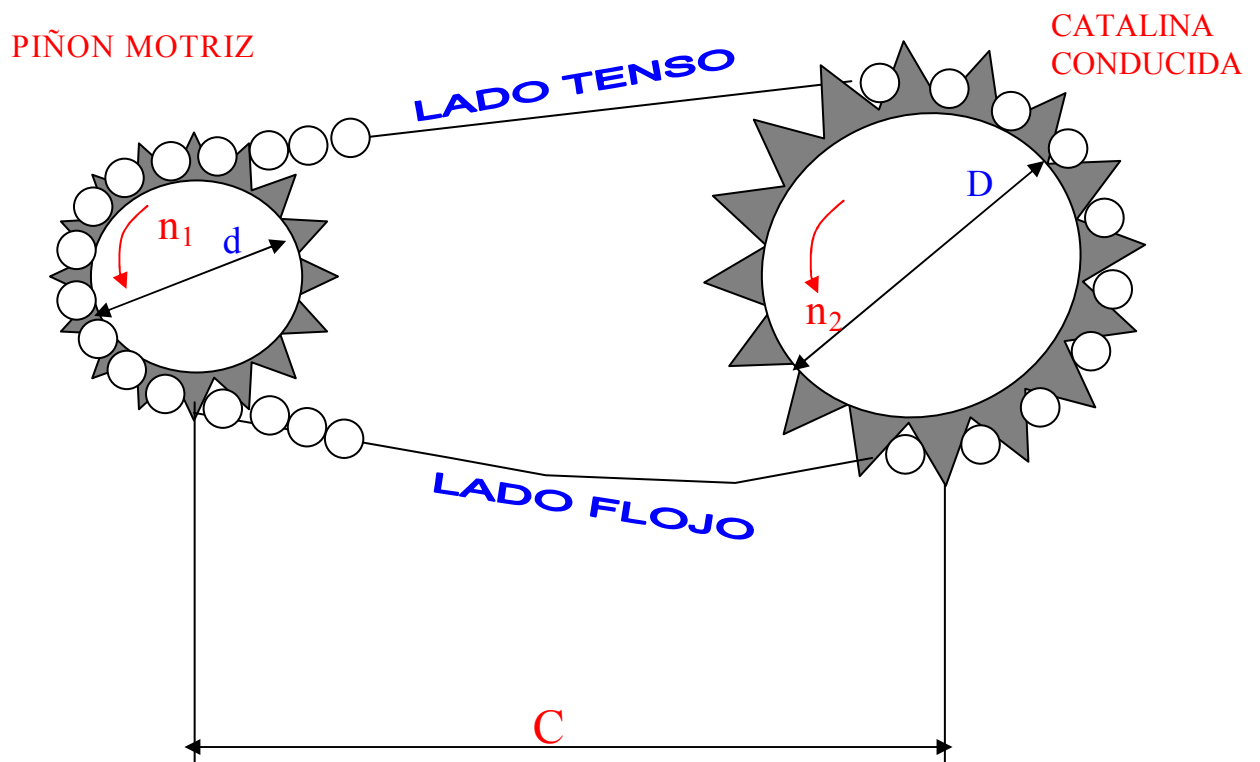
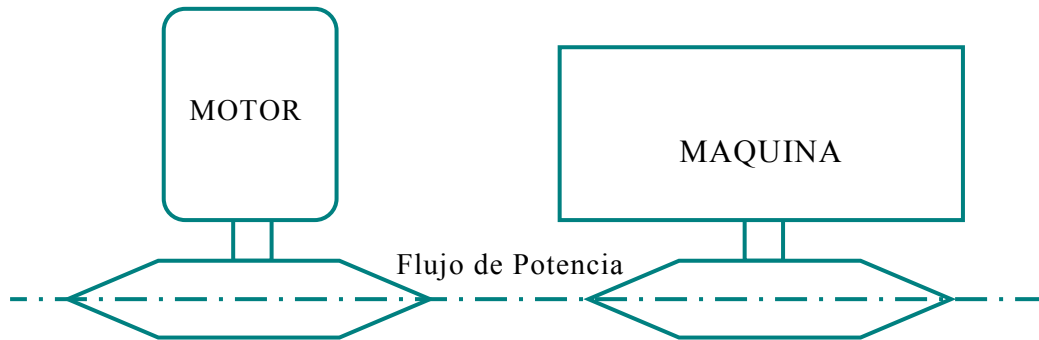
T_m = Torque en la polea motriz en (N.mm)

n_1 = RPM de la polea motriz.

* Esta se cumple para las transmisiones ya sea con fajas, endemas, engranajes, etc.

TRANSMISION DE POTENCIA:

2. Mediante cadena:



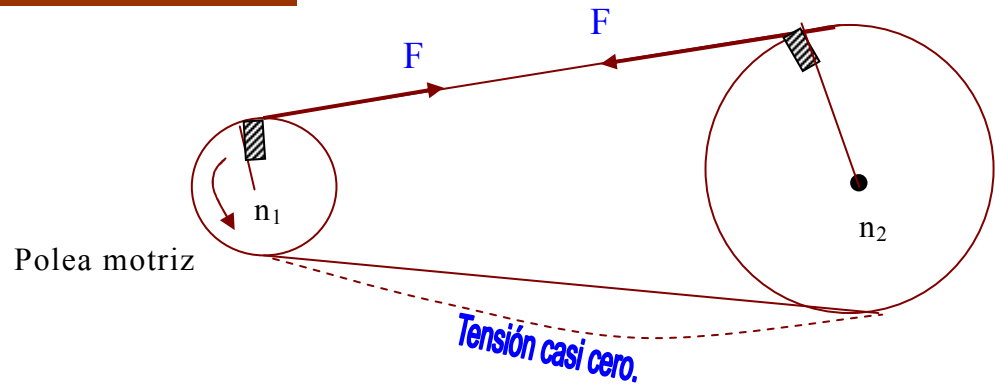
CINEMATICA

Relación de Transmisión

$$R = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D}{d} = \frac{Z_2}{Z_1} \geq 1$$

Z_1 = # dientes del piñón.

Z_2 = # dientes de la catalina.



Torque en el piñón motriz.

$$T_m = F \cdot \frac{d}{2}$$

..... (4)

Torque potencia:

La misma forma (4)

$$T_m = \frac{950000(\text{Pot. en kw})}{n_1}$$

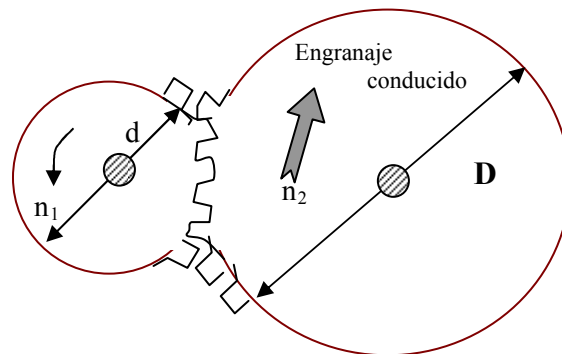
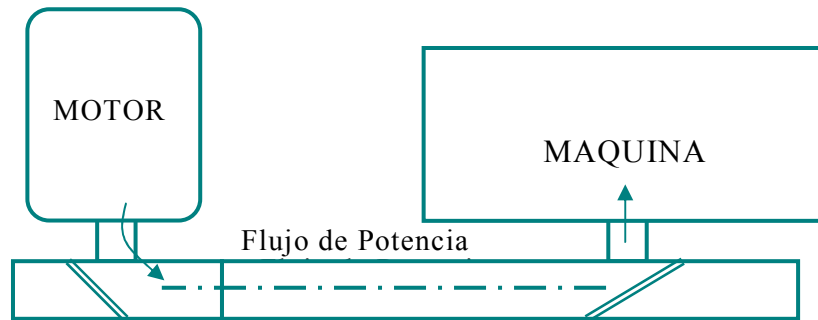
Torque en el eje del piñón motriz.

Torque en el eje del la catalina.

$$T_c = \frac{950000(\text{Pot. en kw})}{n_2}$$

Torque en el eje del piñón motriz.

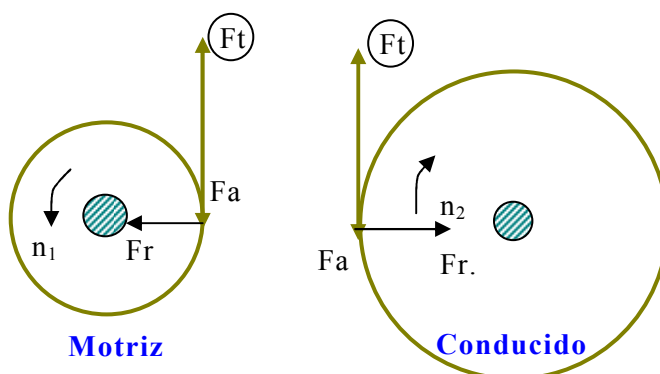
La potencia es en si la misma que en el piñón, la diferencia son las pérdidas.



CINEMATICA

$$R = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D}{d} \cdot \frac{Z_2}{Z_1} \geq 1$$

DINAMICA



$$F_a = F_t \cdot \tan \Psi$$

$$F_r = \frac{F_t}{\cos \Psi} \cdot \tan \phi$$

F_t = Fuerza tangencial

F_a = Fuerza axial

F_r = Fuerza radial

Ψ = ángulo de la Hélice

ϕ = ángulo de la presión.

Torque en el piñón motriz

$$T_m = F_t \cdot \frac{d}{2}$$

F_t : Es la única produce potencia.

Torque – potencia

La misma forma (4)

$$T_m = \frac{950000(\text{Pot. en kw})}{n_1}$$

Torque en el eje del piñón motriz.

Torque en el eje del engranaje conducido.

$$T_C = \frac{950000(\text{Pot. en kw})}{n_2}$$

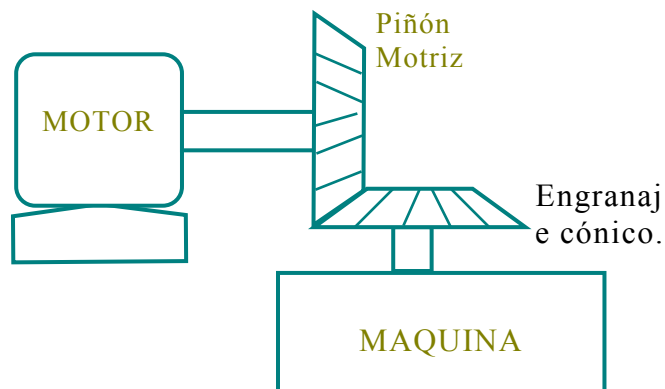
Torque en el eje del piñón motriz.

La potencia es casi la misma que en el piñón; la diferencia son las pérdidas.

Nota: Para dientes rectos $\Psi = 0^\circ \Rightarrow F_a = 0$

TRANSMISIÓN DE POTENCIA

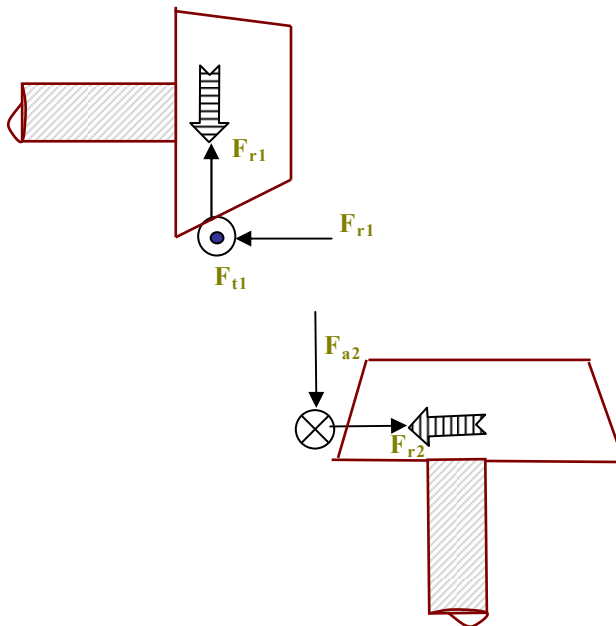
Mediante engranajes cónicos



CINEMATICA

$$R = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D}{d_2} \cdot \frac{Z_2}{Z_1} \geq 1$$

DINAMICA



$$F_r = F_t \cdot \tan \phi \cdot \cos \beta$$

$$F_a = F_t \cdot \tan \phi \cdot \sin \beta$$

ϕ = Ángulo de presión.

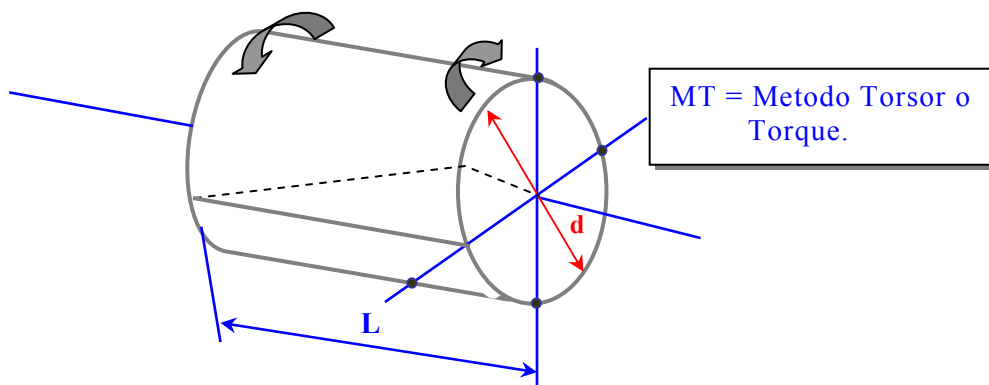
β = Semi ángulo del cono.

$$F_{t1} = F_{t2}$$

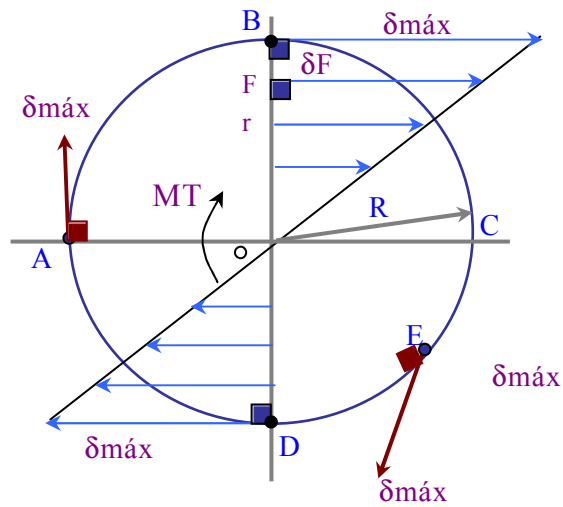
$$F_{r1} = F_{r2}$$

$$F_{a1} = F_{a2}$$

Torsión: La suma cilíndrica está sometida a un estado de tensión pura.



ESFUERZO CORTANTE DE TRACCION



$\delta_{\text{máx}}$ = Esfuerzo cortante máximo debido a la tracción.

$\delta_{\text{máx}}$ = Es tangente a la circunferencia exterior de la barra.

Es igual en todos los puntos de la periferie.

En el punto F el esfuerzo cortante es menor y es proporcional al radio.

$$\frac{\delta F}{r} = \frac{\delta_{\text{máx}}}{R} \rightarrow \boxed{\delta F = \frac{r}{R} \cdot \delta_{\text{máx}}}$$

El $\delta_{\text{máx}}$ se calcula mediante la siguiente. Fórmula, para barras cilíndricas macizas.

$$\boxed{\delta_{\text{máx}} = \frac{16MT}{\pi d^3}}$$

La fórmula general en:

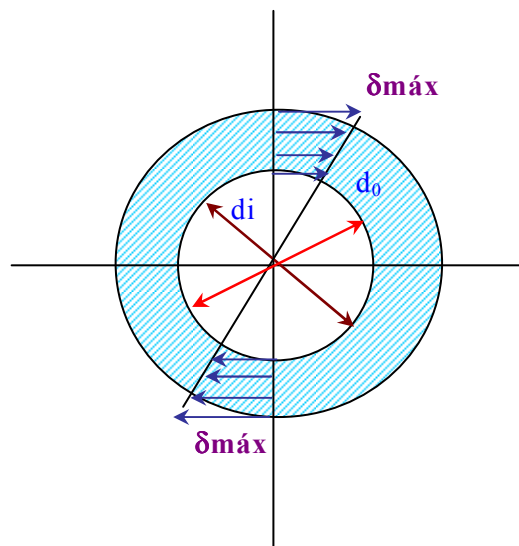
$$\boxed{\delta_{\text{máx}} = \frac{M_T \cdot C}{J}}$$

$$C = \frac{d}{2} \quad J = \text{Momento polar de inercia}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32} \text{ para barra cilíndrica maciza.}$$

$$\delta_{\max} = \frac{M_T \cdot \frac{d}{2}}{\frac{\pi d^4}{32}} \quad \boxed{\delta_{\max} = \frac{16 M_T}{\pi d^3}}$$

PARA BARRA CILÍNDRICA HUECA.



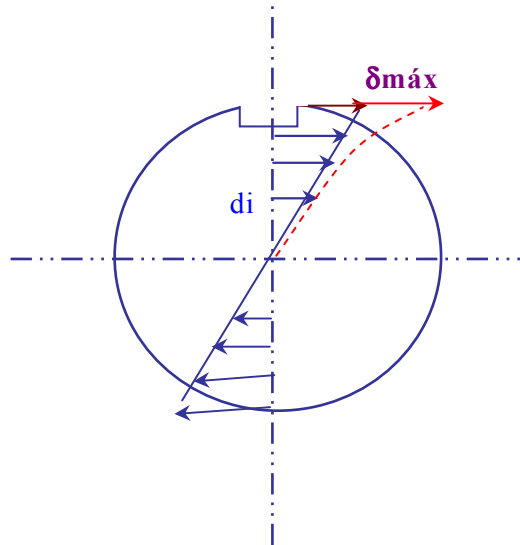
$$\boxed{C = \frac{d_o}{2}}$$

$$\boxed{J = \frac{\pi}{32} (d_o^4 - d_i^4)}$$

$$\boxed{\delta_{\max} = \frac{16 M_T \cdot d_o}{\pi (d_o^4 - d_i^4)}}$$

$$\boxed{\delta_{\max} = \frac{M_T \cdot \frac{d_o}{2}}{\pi / 32 (d_o^4 - d_i^4)}}$$

CUANDO HAY CHAVETERO SE PRODUCE CONCENTRACION DE ESFUERZOS:



En este caso el cortante máximo es:

$$\delta_{\max} = \left(\frac{16 \cdot M_T}{\pi d^3} \right)$$

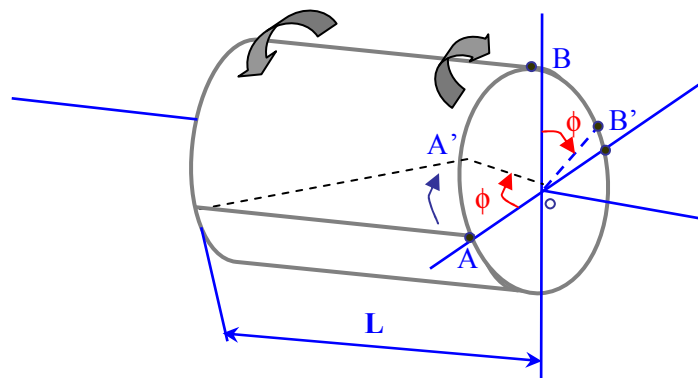
Donde K = factor de concentración de esfuerzos.

= 1,2 a 3.

PARA EJE HUECO:

$$\delta_{\max} = K \left(\frac{16 \cdot M_T \cdot d_o}{\pi C d_o^4 - d^4} \right)$$

ANGULO DE TORSION:



El ángulo de torsión:

$$\phi = \frac{M_T \cdot L}{G \cdot J}$$

L = Longitud de la barra

G = Modulo de elasticidad transversal = 80 GPa
para el acero.

$$J = \frac{\pi d^4}{32} \quad \text{ó} \quad \frac{\pi}{32} (d^4 - d_i^4)$$

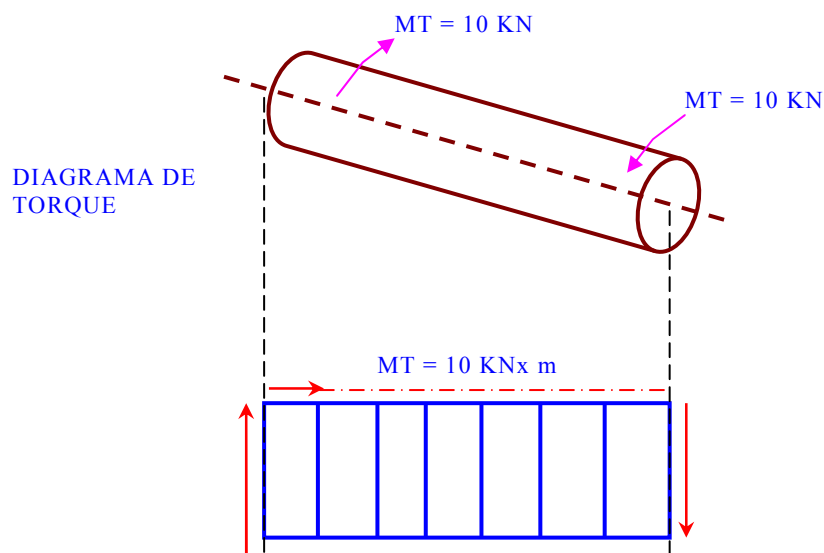
CUANDO EL TORQUE ES DIFERENTE EN VARIOS TRAMOS DE UN EJE

$$\phi_{AE} = \phi_{AB} + \phi_{BC} + \phi_{CD} + \phi_{DE}$$

$$\phi_{AE} = \frac{M_{T_{AB}} \cdot L_{AB}}{G_{AB} \cdot J_{AB}} + \frac{M_{T_{BC}} \cdot L_{BC}}{G_{BC} \cdot J_{BC}} + \frac{M_{T_{CD}} \cdot L_{CD}}{G_{CD} \cdot J_{CD}} + \frac{M_{T_{DE}} \cdot L_{DE}}{G_{DE} \cdot J_{DE}}$$

DIAGRAMAS DE MOMENTOS TORSORES:

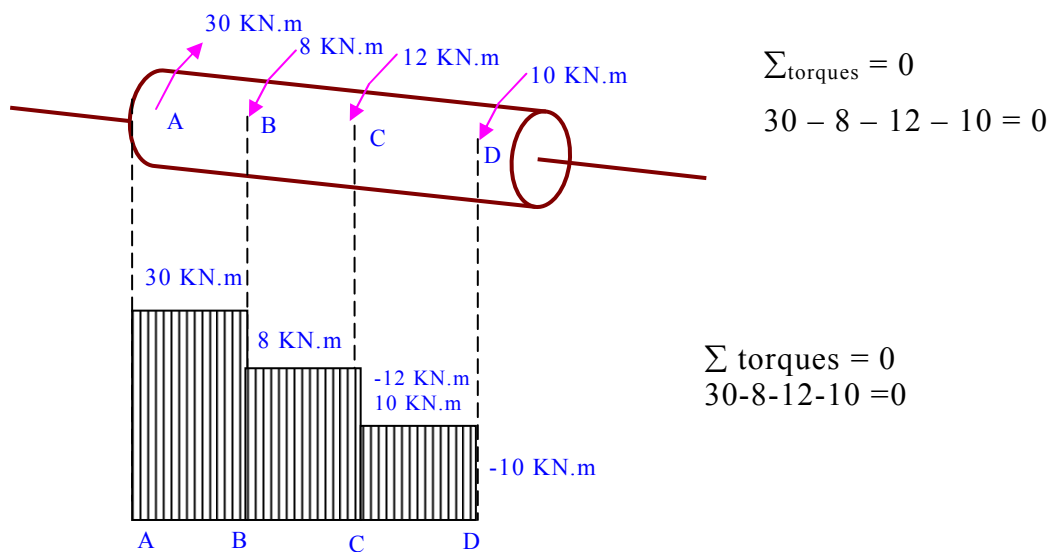
1er Caso:



Si el eje gira a velocidad angular constante ($\omega = \text{constante}$) esta en equilibrio y entonces se cumple que

$$\boxed{\sum \text{torques} = 0} \quad \rightarrow \quad + 10 \text{ KN.m} - 10 \text{ KN.m} = 0$$

2do Caso:



3er Caso:

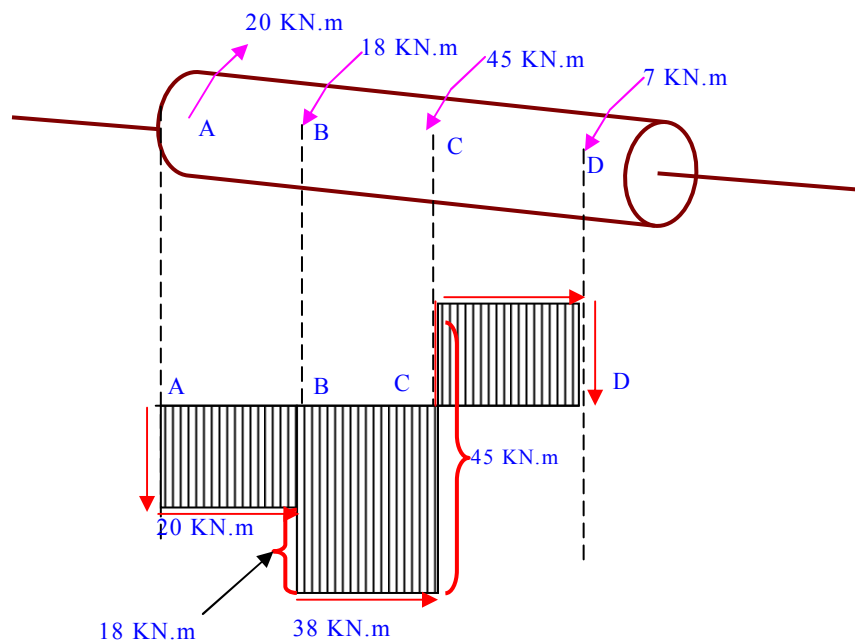
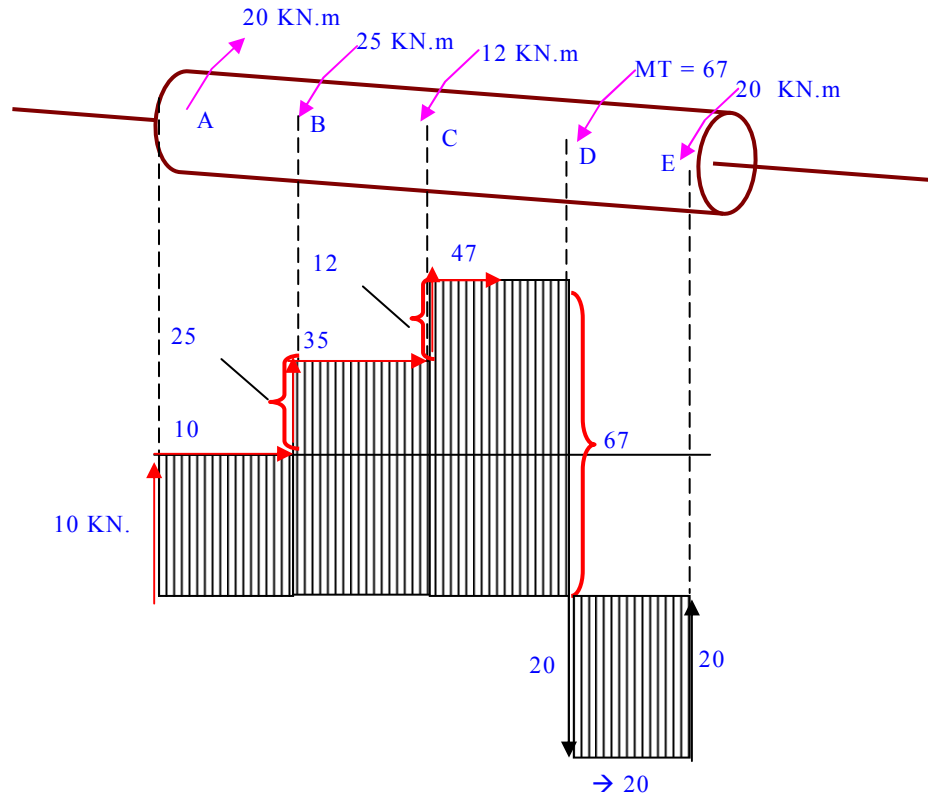


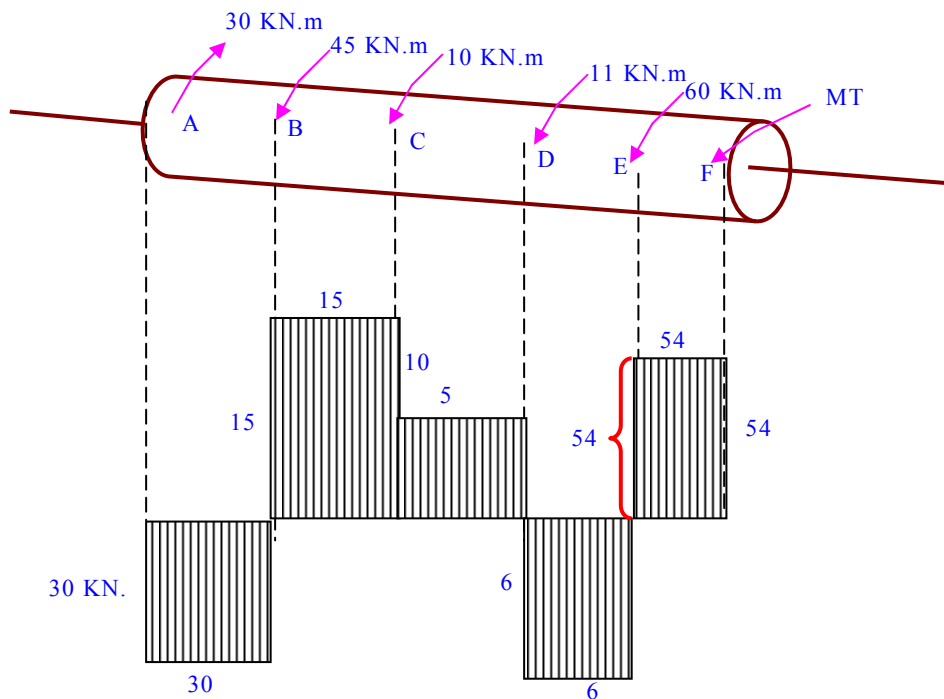
DIAGRAMA DE MOMENTOS TORSORES:

PROB. PROPUESTO

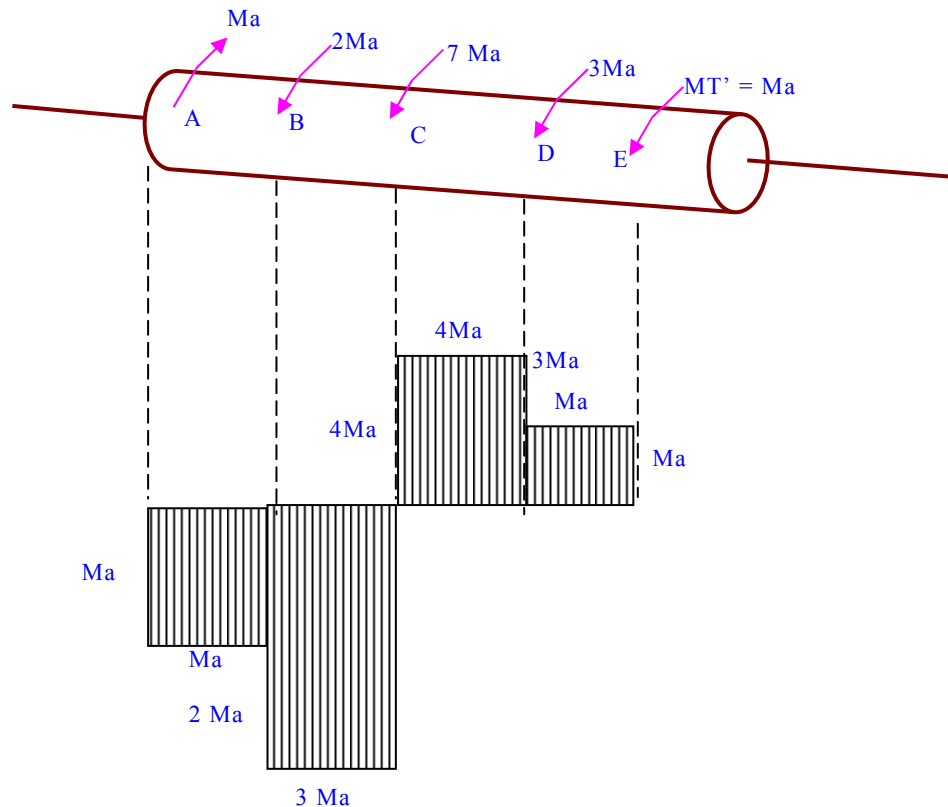
Construir el diagrama de torque en cada caso:



(2)

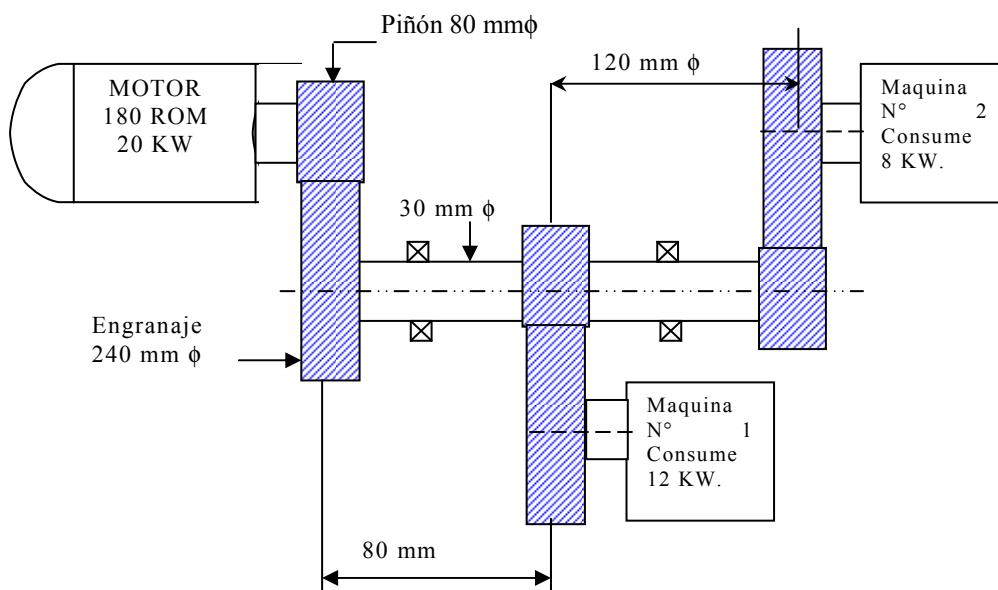


(3)



Problema: Construir el diagrama de momentos torsores del eje AE.

Calcular los esfuerzos cortantes máximos en cada tramo, considere que los engranajes están enchavetados ($K = 2$). Así mismo calcule el ángulo de torsión ϕ o/a (de la sección E respecto a la sección A)



ESFUERZOS CORTANTE MAXIMO

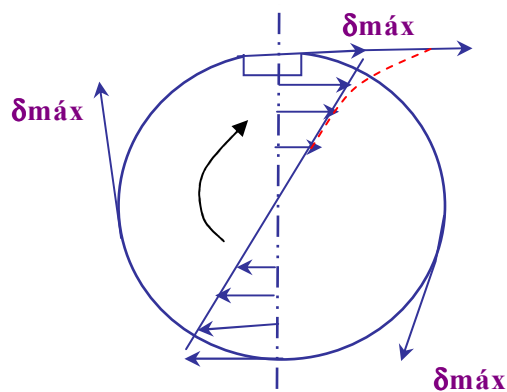
$$\delta_{\max} = \frac{K16T}{\pi d^3} \rightarrow \begin{cases} \delta_{\max} \text{ D.P.T} \\ \delta_{\max} \text{ I.P.d}^3 \end{cases}$$

Para acero:

$$S_y = 250 \text{ MPa.}$$

$$SS_y = 0,6 S_y$$

$$F_s = \frac{SS_y}{\sigma_{\max}} = \frac{150}{17,73} = 8,46$$



En A y C se presentan los cortantes máximos porque hay mayor torque y concentración de esfuerzos por chavetero.

$$\delta_{\max} = \frac{216 \times 111416,67 \text{ Nmm}}{3,1416 \times (40 \text{ mm})^3}$$

$$\delta_{\max} = 17,73 \text{ MPa.}$$

ANGULO DE TORSION DE LA SECCION E RESPECTO A LA SECCION A.

$$\phi_{E/A} = \underbrace{\phi_A}_{=0} + \underbrace{\phi_{B/A}}_{\phi_{C/A}} + \underbrace{\phi_{C/B}}_{\phi_{C/A}} + \underbrace{\phi_{D/C}}_{\phi_{E/C}} + \underbrace{\phi_{E/D}}_{\phi_{E/C}}$$

$$\phi_{E/A} = \phi_{C/A} + \phi_{E/C}$$

$$\phi_{E/A} = \frac{T_{CA} \cdot L_{CA}}{G_{CA} \cdot J_{CA}} + \frac{T_{EC} \cdot L_{EC}}{G_{EC} \cdot J_{EC}}$$

$$= \frac{1114167 \times 220 \text{ mm}}{80 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot (40)^4}{32} \right)} + \frac{71625 \times 230 \text{ mm}}{80 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot (40)^4}{32} \right)} = 0,002038 \text{ Rad.}$$

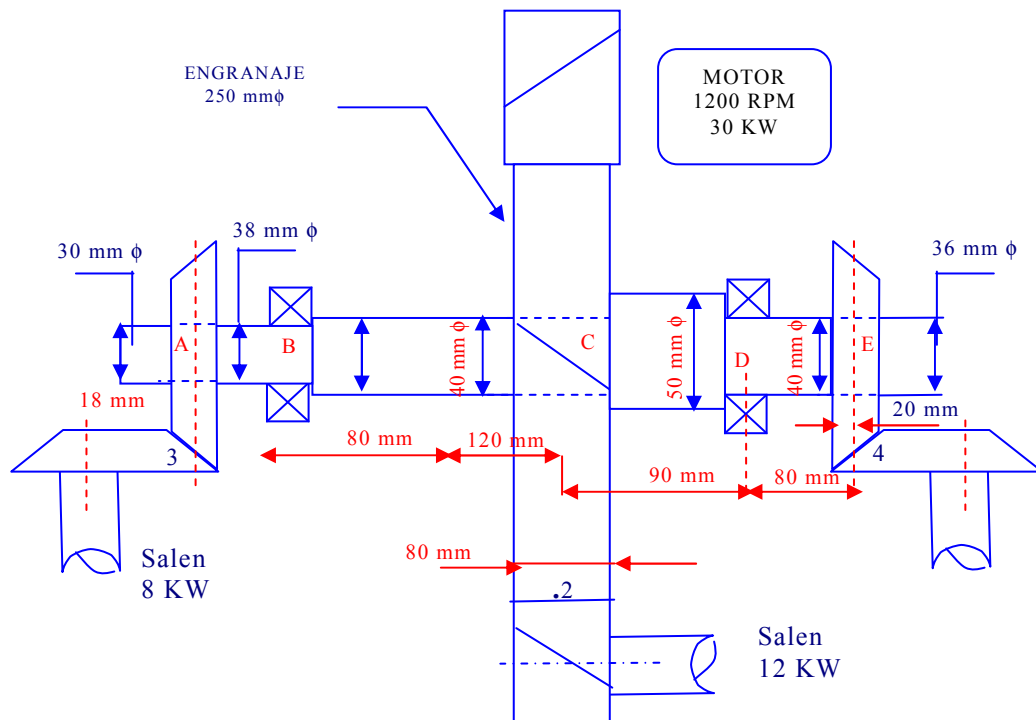
$$= 0,002038 \times \frac{180}{\pi}$$

$$= 0,117^\circ$$

Problema:

Para el eje AE se pide:

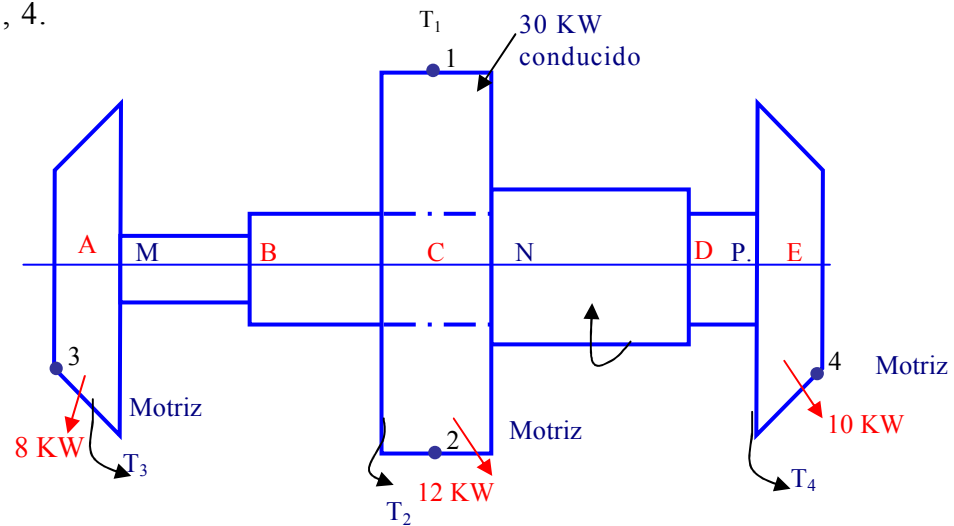
1. Diagrama de momentos torsores
2. Esfuerzo de seguridad Si $S_y = 250 \text{ MPa}$ $SS_y = 0,6 S_y$.
3. Angulo de torsión $\phi_{E/A}$ $G = 806 \text{ Pa}$.



Solución:

Torques en los puntos

1, 2, 3, 4.



$$RPM_{eje} = \frac{1200 \times 100 \text{ mm}}{250 \text{ mm}} = 480 \text{ RPM}$$

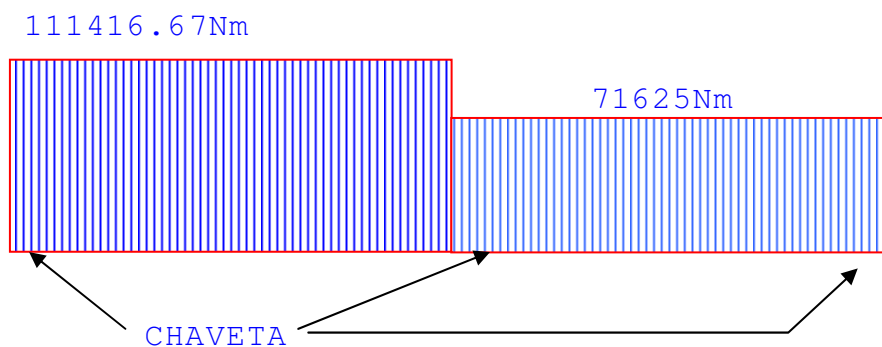
$$T_1 = \frac{9550000(\text{Pot en Kw})}{m}$$

$$T_1 = \frac{9550000 \times 20 \text{kw}}{1200} = 159166,67 \text{ Nmm}$$

$$T_2 = \frac{9550000 \times 6 \text{kw}}{1200} = 47750 \text{ Nmm}$$

$$T_3 = \frac{9550000 \times 5 \text{kw}}{1200} = 39791,67 \text{ Nmm}$$

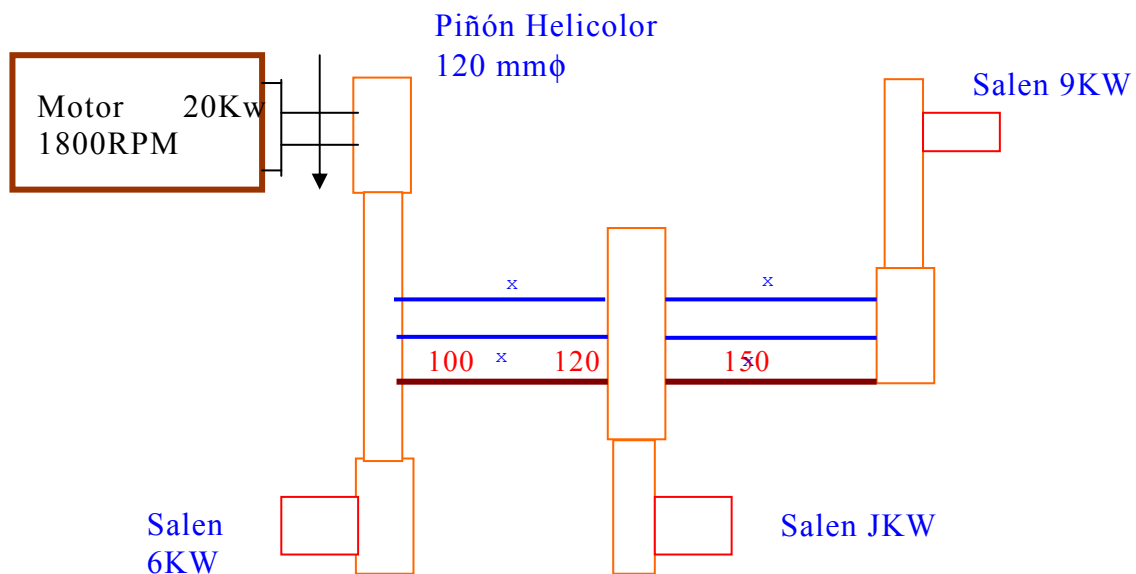
$$T_4 = \frac{9550000 \times 9 \text{kw}}{1200} = 71625 \text{ Nmm}$$



Prob.

Construir el DIAGRAMA DE MOMENTOS TORSORES de eje AE; calcular el esfuerzo cortante máximo y la deformación angular de la sección E, respecto a la sección A.

Asumir $K = 2$; $a = 806 \text{ Pa}$.

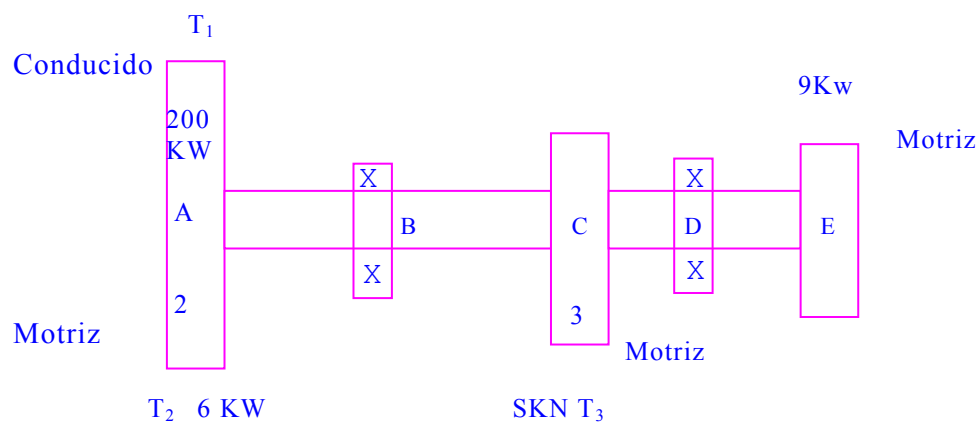


Solución:

RPM del eje AE:

$$1800\text{RPM} \times \frac{120\text{m}}{180\text{mm}} = 120\text{RPM}$$

TORQUES QUE ACTUAN EN LOS PUNTOS 1, 2, 3, 4.



ANGULO $\phi_{E/A}$

$$\phi_{E/A} = \phi_A + \phi_{M/A} + \phi_{B/M} + \phi_{C/B} + \phi_{N/C} + \phi_{D/N} + \phi_{R/D} + \phi_{E/P}$$

$$= 0 + \frac{159166,67 \times 18 \text{ mm}}{80 \times 10^3 \times \frac{1}{32} (30)^2} + \frac{159166,67 \times 62 \text{ mm}}{80 \times 10^3 \times \frac{1}{32} (38)^4} + \frac{159166,67 \times 120 \text{ mm}}{80 \times 10^3 \times \frac{1}{32} (40)^4} + \frac{18958,33 \times 40 \text{ mm}}{80 \times 10^3 \times \frac{1}{32} (40)^4} \\ + \frac{18958,33 \times 50}{80 \times 10^3 \times \frac{1}{32} (40)^4} + \frac{18958,33 \times 60}{80 \times 10^3 \times \frac{1}{32} (40)^4} + \frac{18958,33 \times 20}{80 \times 10^3 \times \frac{1}{32} (30)^4} =$$

PROBLEMA PROPUESTO:

En la siguiente transmisión:

- 1) Continuar el diagrama de momentos torsores ó torques.
- 2) Calcular el esfuerzo cortante máximo ($K = 2$)
- 3) Calcular el factor de seguridad respecto al corte si el material del eje es acero con $S_y = 320 \text{ MPa}$.

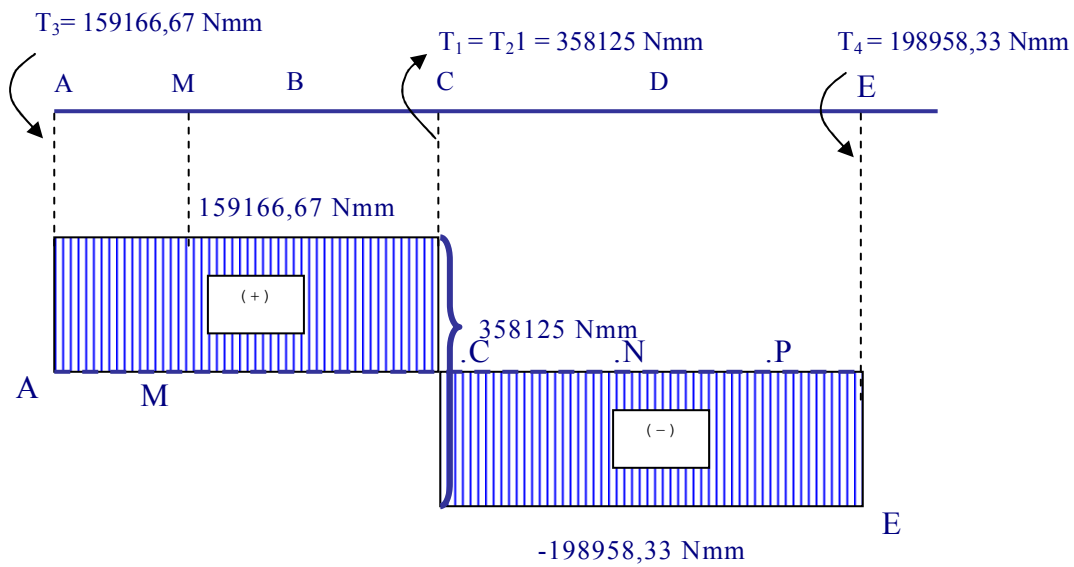
$$\phi_{E/A}; \phi_{C/A}; \phi_{D/B};$$

$$T_1 = \frac{9550000 \times 30 \text{ kw}}{480} = \boxed{596875 \text{ Nmm}}$$

$$T_2 = \frac{9550000 \times 12 \text{ kw}}{480} = \boxed{238750 \text{ Nmm}}$$

$$T_3 = \frac{9550000 \times 5 \text{ kw}}{480} = \boxed{159166,67 \text{ Nmm}}$$

$$T_4 = \frac{9550000 \times 10 \text{ kw}}{480} = \boxed{198958,33 \text{ Nmm}}$$



CORTANTE MAX:

Puntos críticos donde hay chaveta:

Mayor torque y menor ϕ :

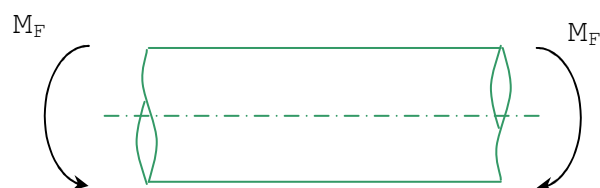
$$\delta_{\max_A} = \frac{K \cdot 16T}{\pi d^3} = \frac{2 \times 16 \times 159166,67 \text{ Nmm}}{\pi (30 \text{ mm})^3} = 60,04 \text{ MPa.}$$

$$\delta_{\max_E} = \frac{2 \times 16 \times 198958,33 \text{ Nmm}}{\pi (36)^3} = 43,44 \text{ MPa.}$$

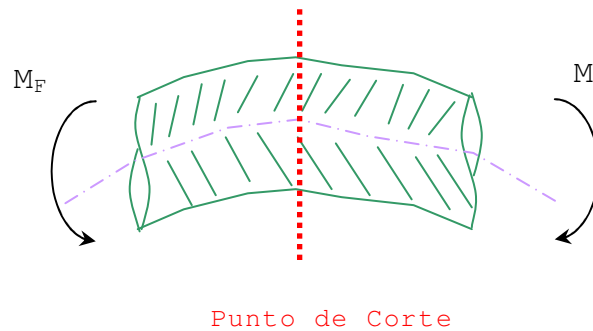
FACTOR SEGURIDAD:

$$\text{En (A). } F_s = \frac{S_{sy}}{\delta_{\max}} = \frac{0,6250}{60,04} = 2,49$$

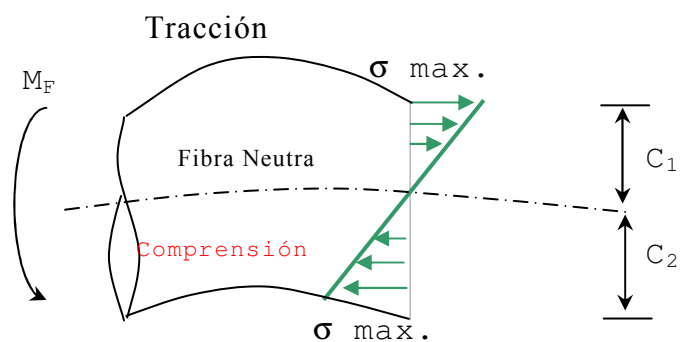
SOLUCION:



La barra deformada es:



CORTANDO LA BARRA:



$\sigma_{\max.+}$ = Esfuerzo máximo de tracción.

$\sigma_{\max.C}$ = Esfuerzo máximo de compresión.

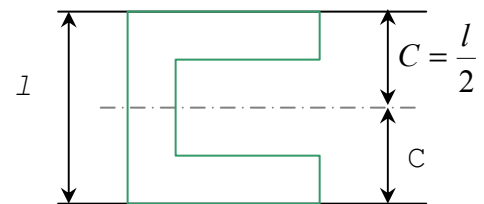
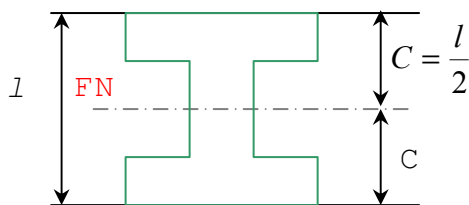
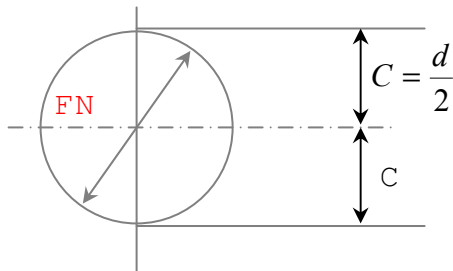
Fibra Neutra: F_n No existe esfuerzo

Fibra Centroidal: F_c

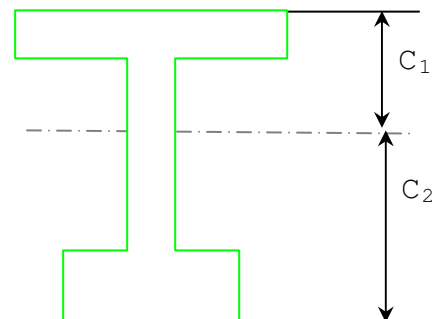
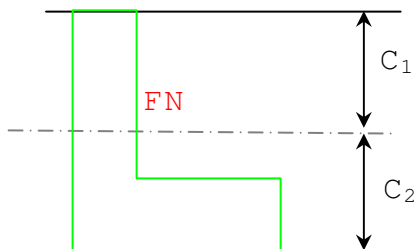
FC y FN COINCIDEN

PARA SECCIONES SIMETRICAS: $C_1 = C_2$

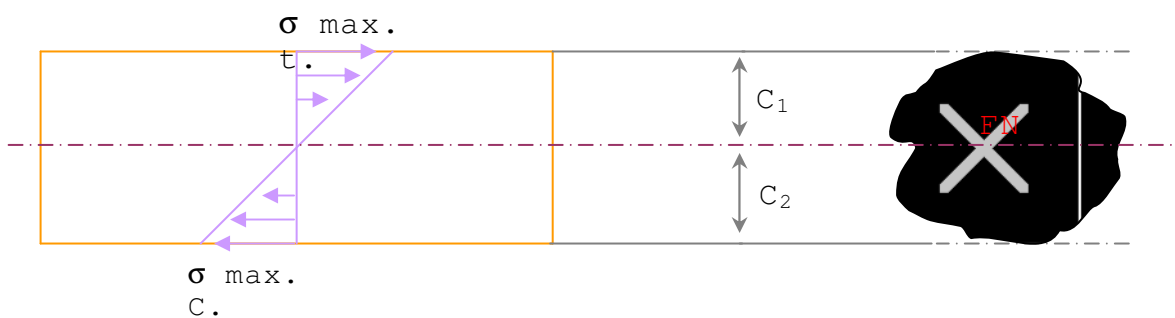
Como por ejemplo:



ESTO NO OCURRE EN SECCIONES ASIMETRICAS COMO



CALCULO DEL ESFUERZO MAXIMO DE FLEXION:



ESFUERZO MAXIMO DE TRACCION
ESFUERZO MAXIMO DE COMPRESIÓN

$$\sigma_{\max.t} = K \left(\frac{M_F \cdot C_1}{I} \right)$$

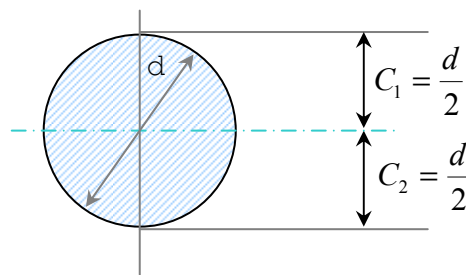
$$\sigma_{\max.C} = \left(\frac{M_F \cdot C_2}{I} \right)$$

Siendo:

M_F = Momento flector en la sección en la sección que se calcula.

K = Factor de concentración de esfuerzos.

I = Momento de inercia de la sección.

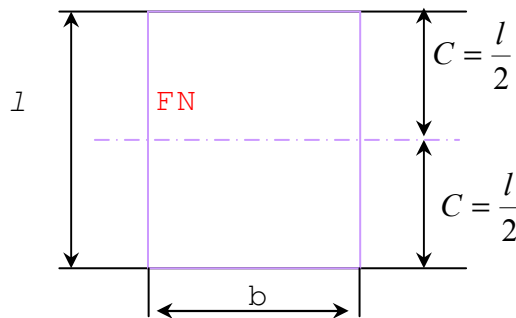
CASOS PARTICULARES:
SECCION CIRCULAR


$$\sigma_{\max.t} = K \left(\frac{M_F \cdot \frac{d}{2}}{\pi \cdot d^4 / 64} \right)$$

$$\sigma_{\max.t} = K \left(\frac{32 M_F}{\pi \cdot d^3} \right)$$

$$\sigma_{\max.C} = \left(\frac{32 M_F}{\pi \cdot d^3} \right)$$

PARA SECCION RECTANGULAR:



$$I = \frac{bL^3}{12}$$

b es paralela a FN
Lxxx es perpendicular a la FN

$$\sigma_{\text{máx.t}} = K \left(\frac{M_F \cdot L / 2}{bL^3 / 12} \right)$$

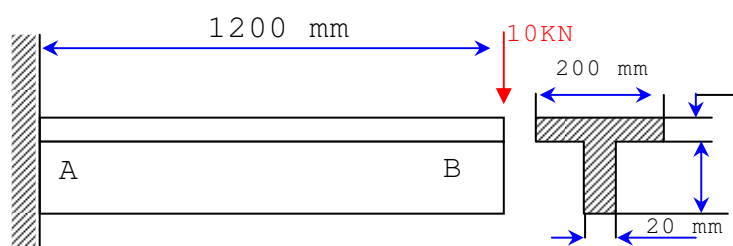
$$\sigma_{\text{máx.t}} = K \left(\frac{6M_F}{bL^2} \right)$$

$$\sigma_{\text{máx.C}} = \left(\frac{6M_F}{bL^2} \right)$$

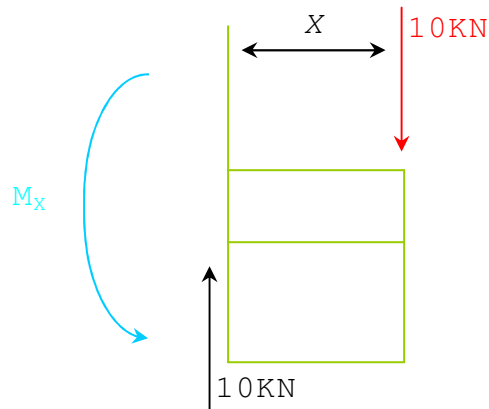
PROBLEMA:

Calcular:

- Los esfuerzos máximos de tracción y compresión debido a la flexión. ($K = 2$).
- El factor de seguridad si la viga es de acero con $S_y = 250$ MPa.



Solución:



$$M_x = 10 \text{ kN} \cdot X \text{ mm}$$

$$M_x = 10_X \text{ kN mm}$$

$$M_x = 10 \cdot 10^3 x \text{ Nmm}$$

$$M_x = 10^4 x \text{ Nmm}$$

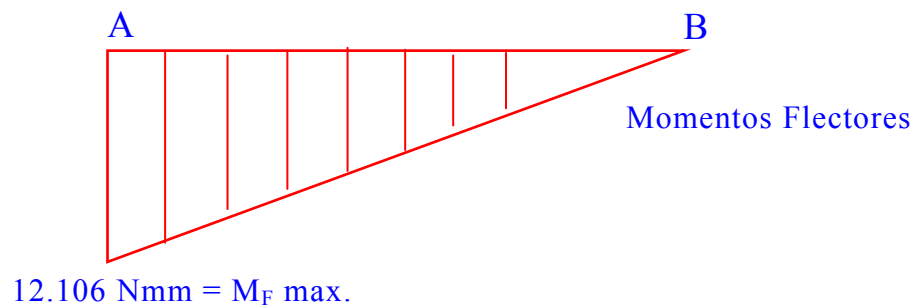
Es función lineal y su gráfico es una recta.

DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES

Cuando $X = 0 \rightarrow M_x = M_B = 0$

Cuando $X = 1200 \rightarrow M_x = M_A = 10^4 \cdot 1200 \text{ Nmm}$

$$M_A = 12 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

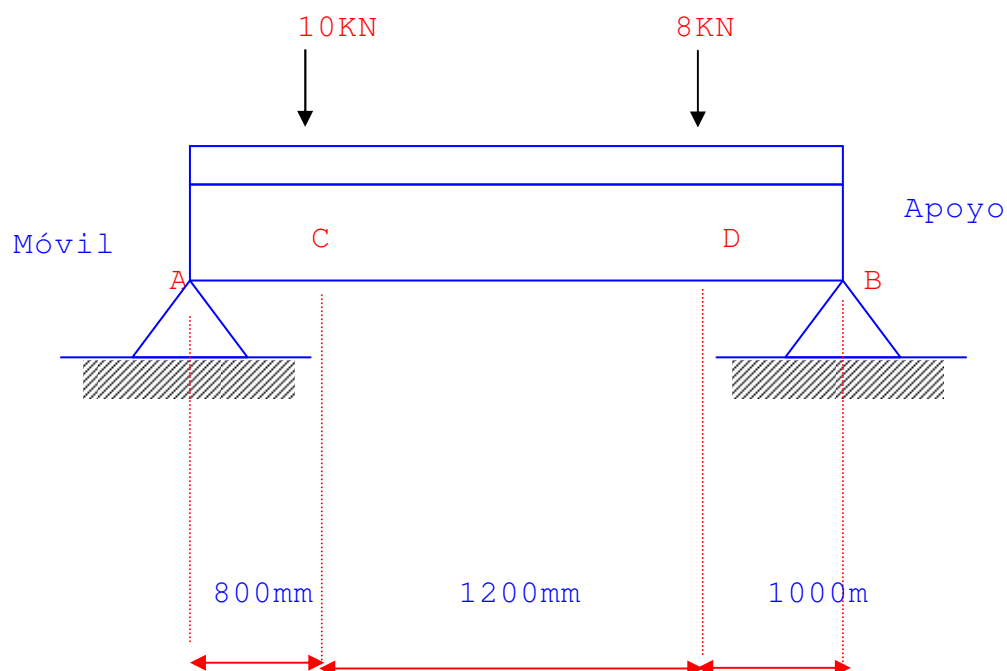


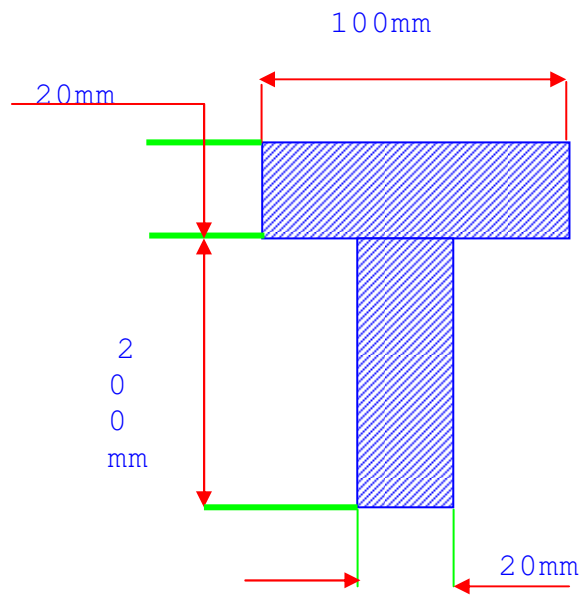
La sección A es crítica porque en ella actúa el máx momento flector aquí se calcula $\sigma_{\max.t}$ $\wedge$ $\sigma_{\max.C}$

$$M_{F \max} = 12 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE Y MOMENTOS FLETORES

Problema: Construir el diagrama de fuerzas cortantes y momentos flectores de la viga mostrada.

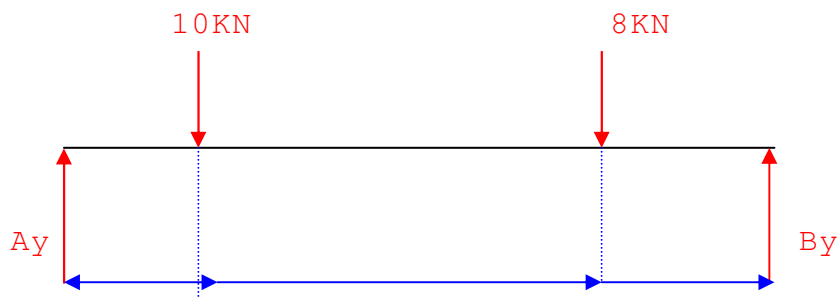




Solución:

CÁLCULO DE REACCIONES EN A Y B:

D.C.L.



$$\sum M_0^A = 0$$

$$10 \text{ KN} \cdot 800 + 8 \text{ KN} \cdot 200 - B_y \cdot 3000 = 0$$

$$8 + 16 - 3B_y = 0$$

$$24 = 3B_y$$

$$B_y = 8 \text{ KN}$$

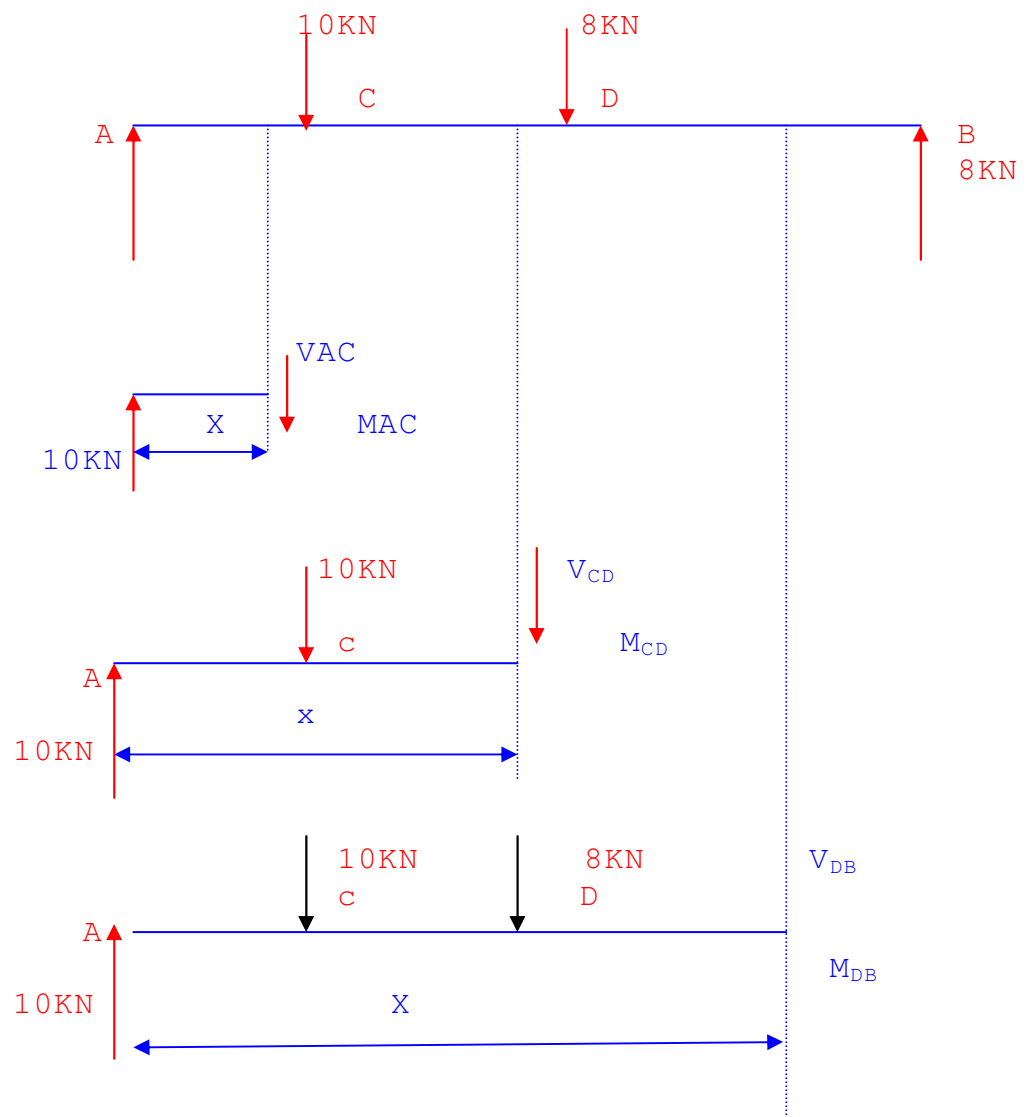
Hay dos posibilidades: aplicando: $\sum F_y = 0$: $\sum M_0^B = 0$

Usando: $\sum F_y = 0$

$$A_y - 10\text{KN} - 8\text{KN} + 8\text{KN} = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 10\text{KN}$$

DIAGRAMA DE FUERZAS CORTANTES



TRAMO AC:

$$0 \leq X \leq 800$$

V_{AC} = Fuerzas cortante en la sección ubicada a una distancia x del punto A.



No depende de X

$$V_{AC} = 10 \text{ KN}$$

Es constante es decir es igual en todas las secciones del tramo AC.

TRAMO CD: $800 \leq x \leq 2000$

$$V_{CD} = 10 \text{ KN} - 10 \text{ KN} = 0$$

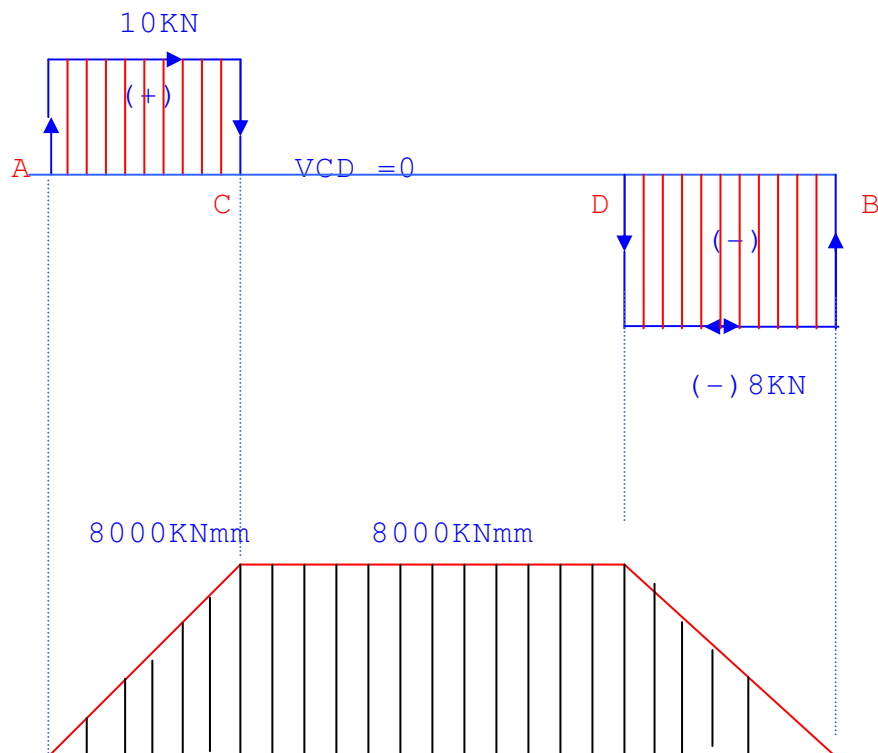
Es constante porque no depende de x .

TRAMO DB: $V_{CD} = 0$

$$V_{CB} = 10 \text{ KN} - 10 \text{ K } 0 \text{ } 8 \text{ KN}$$

$$V_{CB} = (-) 8 \text{ KN}$$

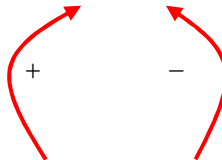
Es constante porque no depende de x .

DIAGRAMA DE FUERZAS CORTANTES:


MOMENTOS FLECTORES:

TRAMO AC: $0 \leq x \leq 800$

Mirando hacia la izquierda de la sección:



$$M_{AC} = 10 \text{ KN} \cdot x \cdot \text{mm}$$

$$M_{AC} = 10x \text{ KNmm}$$

Es función lineal de $x \rightarrow$

Línea Recta

Si $X = 0 \rightarrow M_{AC} = M_A = 0$: $X = 800 \rightarrow M_{AC} = M_C$

$$M_C = 10 \text{ KN} \cdot 800 \text{ mm}$$

$$M_C = 8000 \text{ KN mm}$$

TRAMO CD: $800 \leq x \leq 2000$

$$M_{CD} = 10 \text{ KN} \cdot x \text{ mm} + 10 \text{ KN} (x - 800) \text{ mm}$$

$$M_{CD} = 10x - 10x + 8000 \text{ KN mm}$$

$$M_{CD} = 8000 \text{ KN mm}$$

Es constante o sea no es función de x

TRAMO DB: $2000 \leq x \leq 3000$

$$M_{DB} = 10x - 10(x - 800) - 8(x - 2000)$$

$$M_{DB} = 8000 - 8x + 16000 \rightarrow M_{DB} = 24000 - 8x \text{ KN mm}$$

$$X = 2000 \rightarrow M_{DB} = M_D = 24000 - 8 \times 2000 = 8000 \text{ KN mm}$$

$$X = 3000 \rightarrow M_{DB} = M_B = 24000 - 8 \times 3000 = 0 \text{ KN mm}$$

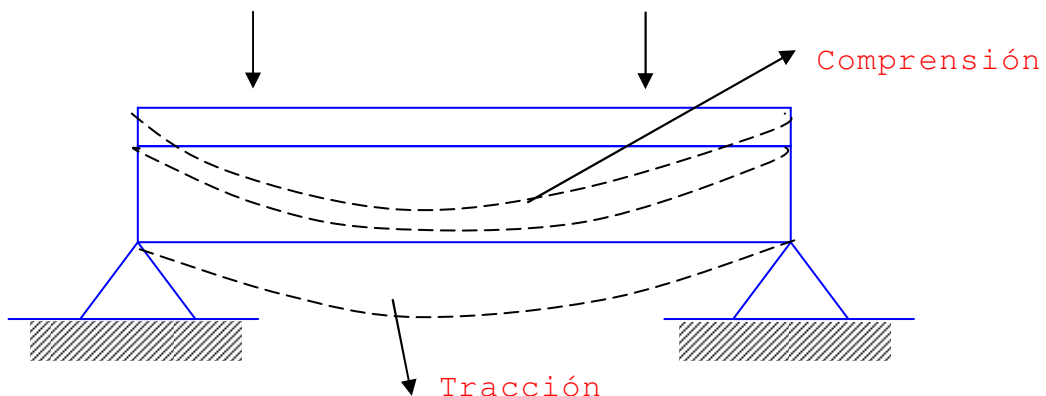
Prob:

En el problema anterior calcular:

- 1) Los esfuerzos máximos de flexión (tracción); (compresión).
- 2) El factor de seguridad sabiendo que el material es acero estructural con $S_y = 250 \text{ MPa}$.

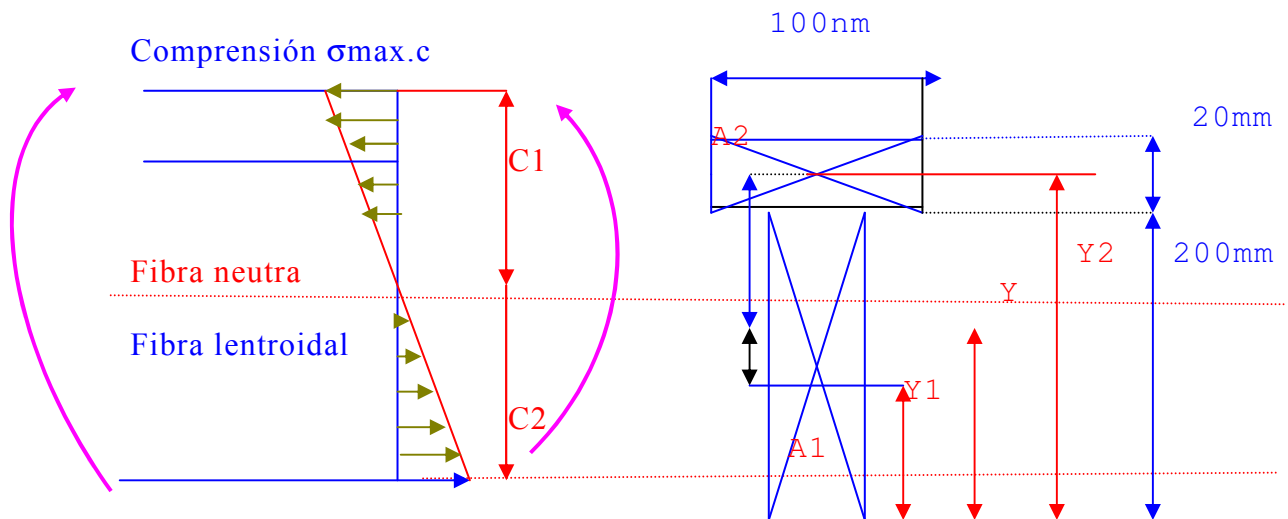
Solución: 1) Esfuerzos máximos de flexión:

$$\sigma_{\max} = ?$$



$$\sigma_{\max} = \frac{M_F \cdot C}{I}$$

$$M_F (\text{máximo}) = 8000 \text{ KN mm} \\ = 8 \times 10^6 \text{ Nm}$$



UBICACIÓN DE FN ó FC

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}$$

$$\bar{y} = \frac{(20 \times 200 \text{ mm}^2)(100 \text{ mm}) + (100 \times 20 \text{ mm}^2)(210 \text{ mm})}{(20 \times 200 + 100 \times 20) \text{ mm}^2} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = 136,67 \text{ mm}}$$

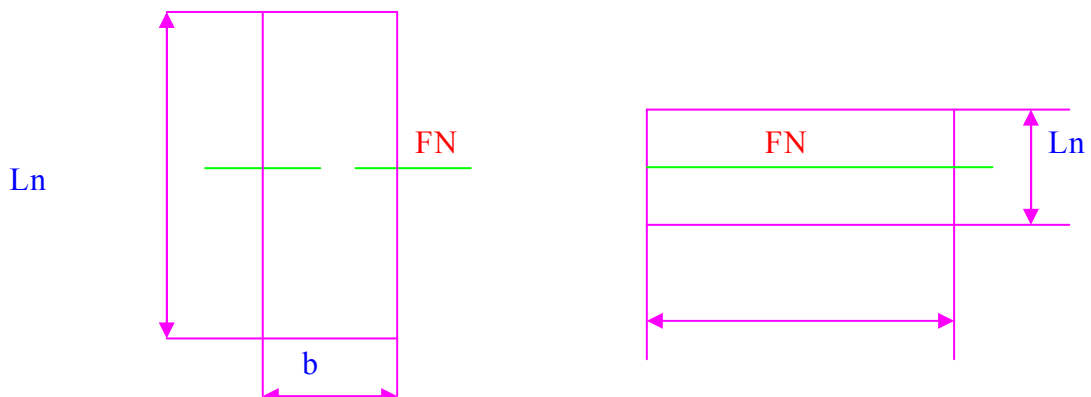
$$C_1 = 220 - 136,67 \text{ mm} \Rightarrow \boxed{C_1 = 83,33}$$

$$C_2 = \bar{y}$$

$$\boxed{C_1 = 83,33}$$

CALCULO DEL MOMENTO DE INERCIA I

$$\text{Para un rectángulo } I = \frac{6L^3}{12}$$



Para secciones compuestas de varios rectángulos:

$$I = \sum \left(\frac{b_i h_i^3}{12} + A_i d_i^2 \right)$$

d_i = distancia del centro de gravedad del área A_i al centro de gravedad de la sección compuesta.

Pero el área $A_1 \rightarrow d_1 = 136,67 - 100$

$$d_1 = 36,67 \text{ mm}$$

Pero el área $A_2 \rightarrow d_2 = 210 - 136,67$

$$d_2 = 73,33 \text{ mm}$$

$$I = \left(\frac{20 \times 200^3 \text{ mm}^4}{12} + (20 \times 200 \text{ mm}^2) (36,67^2 \text{ mm}^2) \right) + \left(\frac{100 \times 20^3 \text{ mm}^4}{12} + (100 \times 20 \text{ mm}^2) (73,33^2 \text{ mm}^2) \right)$$

Nota: $F_s - Z$ Siempre se toma el $|\sigma_{\text{máx}}|$ t ó C. el valor numérico que sea mayor.

$$\Rightarrow F_s = \frac{250}{|\sigma_{\text{máx t ó C}}|}$$

Bibliografía

 TIMOSHENKO

 BEER JONSON

 SINGER

 SCHAUMS