

MA674 - Análisis Convexo y Dualidad. Semestre otoño 2011

Profesor: Hector Ramirez Auxiliares: Cristopher Hermosilla, David Sossa

Clase Auxiliar 4

18 de abril de 2011

P1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $f \in \Gamma_0(X)$. Denotemos por X^* al dual topológico de X y por $\|\cdot\|_*$ a la norma (sobre X^*) dual de $\|\cdot\|$. Para $x \in \text{dom} f$ y $\epsilon \geq 0$, definimos el ϵ -subdiferencial de f en x como:

$$\partial_\epsilon f(x) := \{s \in X^* \mid f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle - \epsilon \text{ para todo } y \in X\}.$$

- a) 1) Expresar $\partial_\epsilon f(x)$ usando la conjugada de Fenchel f^* de f .
 2) Sabiendo que $-f(x) = -f^{**}(x) = \inf_{s \in X^*} \{f^*(s) - \langle s, x \rangle\}$, mostrar que $\partial_\epsilon f(x) \neq \emptyset$ para todo $\epsilon > 0$.
 b) (Teorema de Bronsted - Rockafellar) Dados $x_0 \in \text{dom} f$, $\epsilon > 0$ y $s_0 \in \partial_\epsilon f(x_0)$, mostrar que existe $x_\epsilon \in \text{dom} f$, $s_\epsilon \in \partial f(x_\epsilon)$ tales que:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|x_\epsilon - x_0\| \leq \sqrt{\epsilon}; \\ (ii) \quad & \|s_\epsilon - s_0\|_* \leq \sqrt{\epsilon}. \end{aligned}$$

- c) Del anterior punto, deducir que $\text{dom}(\partial f)$ es denso en $\text{dom} f$.

P2. Sea $(X, Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una dualidad entre e.v.t.l.c. Dadas dos funciones convexas $f, g : \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, se define la *inf-convolución* de f y g mediante

$$(f * g)(x) := \inf \{f(x_1) + g(x_2) \mid x_1 + x_2 = x\}.$$

- a) Pruebe que $f * g$ es convexa, con $\text{dom}(f * g) = \text{dom}(f) + \text{dom}(g)$.
 b) Sea $y \in Y$, muestre que $(f * g)^*(y) = f^*(y) + g^*(y)$.
 c) Pruebe que si $\bar{x}_1 \in \text{dom}(f)$ y $\bar{x}_2 \in \text{dom}(g)$ son tales que $(f * g)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = f(\bar{x}_1) + g(\bar{x}_2)$, entonces $\partial(f * g)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \partial f(\bar{x}_1) \cap \partial g(\bar{x}_2)$.
 d) (Efecto Regularizante) Suponga que $\bar{x}_i$ son los considerados en la parte anterior. Asumiendo que $f * g$ es subdiferenciable en $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, muestre que $f * g$ es Gâteaux-diferenciable en $\bar{x}$ si g lo es en $\bar{x}_2$ con

$$\nabla(f * g)(\bar{x}) = \nabla g(\bar{x}_2).$$

Muestre que si además $(X, \|\cdot\|)$ es un e.v.n. y g es Fréchet-diferenciable en $\bar{x}_2$, entonces $f * g$ es Fréchet-diferenciable en $\bar{x}$.