

### Control de Teoría de la Medida (con Bosquejo de Solución)

1. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  un Espacio de Medida sobre los Borelianos. Si  $\mu$  no es finita, asuma que existen dos secuencias crecientes a  $X$ ,  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que:

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $K_n$  es compacto,  $\mu(K_n) < \infty$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n$  es abierto,  $\mu(X_n) < \infty$

Pruebe que dado  $B \in \mathcal{B}$ :

- a) Si  $\mu$  es finita entonces  $\forall \epsilon > 0$  existe un cerrado  $V$  y un abierto  $U$  tal que  $V \subseteq B \subseteq U$  y  $\mu(U \setminus V) < \epsilon$ .

**HINT:** Muestre que el conjunto de elementos en  $\mathcal{B}$  que cumplen lo anterior es una  $\sigma$ -álgebra.

- b) Si  $\mu(B) < \infty$  entonces  $\forall \epsilon > 0$  existe un compacto  $K$  y un abierto  $U$  tal que  $K \subseteq B \subseteq U$  y  $\mu(U \setminus K) < \epsilon$

**HINT:** Considere las medidas traza sobre  $X_n$  y  $K_n$  y considere  $\mu(U \setminus B)$  y  $\mu(B \setminus K)$  por separado.

- c) Se dice que  $\mu$  es regular si para cualquier  $B \in \mathcal{B}$ :

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K)/K \subseteq B, K \text{ compacto}\} = \inf\{\mu(U)/B \subseteq U, U \text{ abierto}\}.$$

Pruebe que  $\mu$  es regular

#### Solución:

- a) Sean  $\mathcal{T}$  los abiertos de la topología inducida por  $d$ . Definamos:

$$\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} / \forall \epsilon > 0, \exists U, V \in \mathcal{T}, V^c \subseteq B \subseteq U, \mu(U \cap V) < \epsilon\}.$$

Como  $X$  y  $\emptyset$  son abiertos y  $\emptyset^c \subseteq X \subseteq X$  con  $\mu(X \cap \emptyset) = 0$  se cumple que  $X \in \mathcal{A}$ .

Dado  $B \in \mathcal{A}$  y  $\epsilon > 0$  se tienen,  $U, V \in \mathcal{T}$ ,  $V^c \subseteq B \subseteq U$  y  $\mu(U \cap V) < \epsilon$ . Por definición se tiene que  $U^c \subseteq B^c \subseteq V$ . Es decir,  $B^c \in \mathcal{A}$ .

Sea  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ . Entonces por definición, dado  $\epsilon > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos  $U_n, V_n \in \mathcal{T}$  tales que  $V_n^c \subseteq B_n \subseteq U_n$  y  $\mu(U_n \cap V_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$ .

Definamos  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  y  $V^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n^c$ . Tenemos que  $U \in \mathcal{T}$  y  $V^c \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subseteq U$ .

El problema es que  $V$  no es necesariamente abierto. Dado  $N \in \mathbb{N}$  definamos el conjunto  $W_N^c = \bigcup_{n \leq N} V_n^c$ , por construcción  $W_N \in \mathcal{T}$  y  $W_N^c \subseteq V^c$ . Como  $\{W_N^c\}_{N \in \mathbb{N}}$  es una familia creciente a  $V^c$  para  $N$  suficientemente grande  $\mu(V^c \cap W_N) < \frac{\epsilon}{2}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \mu(U \cap W_N) &= \mu(U \cap V) + \mu(V^c \cap W_N) \leq \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \cap V_n\right) + \frac{\epsilon}{2}, \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$ .

Dado  $B \in \mathcal{T}$  y  $n \in \mathbb{N}$  definamos  $V_n^c = \{x \in X / d(x, B^c) \geq \frac{1}{n}\}$  que es un cerrado. Como  $B^c$  es cerrado entonces para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n^c \subseteq B$  y  $\{V_n^c\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia que crece a  $B$ .

Entonces para cualquier  $\epsilon > 0$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $V_n^c \subseteq B \subseteq B$  y  $\mu(B \cap V_n) < \epsilon$  y por tanto  $B \in \mathcal{A}$ .

Hemos probado que  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  y por tanto  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ .

b) Sea  $\epsilon > 0$ .

Construcción de  $K$ : Sabemos que  $\{B \cap K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia creciente a  $B$  y por tanto existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\mu(B) - \mu(B \cap K_n) < \frac{\epsilon}{4}$ .

Por el resultado anterior para  $\mu_{K_n}$  (finita por definición) se tienen  $V^c \subseteq B \subseteq U$  tales que  $\mu_{K_n}(B \cap V) \leq \mu_{K_n}(U \cap V) < \frac{\epsilon}{4}$ .

Siendo  $K_n$  compacto y  $V^c$  cerrado entonces  $K = K_n \cap V^c$  es compacto. Por construcción:

$$\begin{aligned} \mu(B \setminus K) &= \mu(B) - \mu(B \cap K_n) + \mu(B \cap K_n) - \mu(K), \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + \mu_{K_n}(B \cap V) \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Construcción de  $U$ : Para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  existen  $U_n, V_n \in \mathcal{T}$  tales que  $V_n^c \subseteq B \subseteq U_n$  y  $\mu_{X_n}(U_n \setminus B) \leq \mu_{X_n}(U_n \cap V_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$ .

Entonces  $B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n := U$  y:

$$\mu(U \setminus B) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(U_n \cap X_n \setminus B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{X_n}(U_n \setminus B) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces tenemos que  $K \subseteq B \subseteq U$  con  $U$  abierto y  $K$  compacto y tales que  $\mu(U \setminus K) = \mu(U \setminus B) + \mu(B \setminus K) = \epsilon$ .

c) Por simple inclusión y monotonía de la medida siempre se tiene que:

$$\sup\{\mu(K)/K \subseteq B, K \text{ compacto}\} \leq \mu(B) \leq \inf\{\mu(U)/B \subseteq U, U \text{ abierto}\}.$$

Si  $\mu(B) < \infty$  por lo anterior. Dado cualquier  $\epsilon > 0$  se tiene que existen  $K$  compacto y  $U$  abierto tales que  $K \subseteq B \subseteq U$  y  $\mu(U \setminus K) < \epsilon$ . En particular,  $\mu(U \setminus B) < \epsilon$  y  $\mu(B \setminus K) < \epsilon$ .

Es decir,  $\forall \epsilon > 0, \exists U \in \mathcal{T}, B \subseteq U$  tal que  $\mu(U) - \epsilon < \mu(B)$ .

Que se traduce como  $\inf\{\mu(U)/B \subseteq U, U \text{ abierto}\} \leq \mu(B)$ .

Del mismo modo,  $\forall \epsilon > 0, \exists K$  compacto,  $K \subseteq B$  tal que  $\mu(K) + \epsilon > \mu(B)$ .

Que se traduce como  $\sup\{\mu(K)/K \subseteq B, K \text{ compacto}\} \geq \mu(B)$ .

Si  $\mu(B) = \infty$  como  $\mu(B) \leq \inf\{\mu(U)/B \subseteq U, U \text{ abierto}\}$  se concluye que  $\inf\{\mu(U)/B \subseteq U, U \text{ abierto}\} = \infty$ .

Para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $\mu(B \cap X_n) < \infty$  y por tanto:

$$\begin{aligned} \mu(B \cap X_n) &= \sup\{\mu(K)/K \subseteq B \cap X_n, K \text{ compacto}\}, \\ &\leq \sup\{\mu(K)/K \subseteq B, K \text{ compacto}\}. \end{aligned}$$

Como  $\{B \cap X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia creciente a  $B$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B \cap X_n) = \infty$ .

2. Sea  $(X, \mathcal{A})$  un Espacio de Medida y  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una familia de medidas sobre  $\mathcal{A}$ . Se define  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  como  $\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A)$ .

a) Pruebe que  $\mu$  es medida.

- b) Pruebe que dada  $f \in L^1_\mu$ ,  $f \geq 0$  implica que  $\int f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f d\mu_n$ .  
 Esto se puede extender al caso en que  $f$  no es positiva?.
- c) Si la familia  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es  $\sigma$ -finita es necesariamente  $\mu$   $\sigma$ -finita?

**Solución:**

- a) Para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  y cualquier  $A \in \mathcal{A}$  se tiene que  $\mu_n(A) \geq 0$  y por tanto  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A) \geq 0$ .

Sea  $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  una familia disjunta 2 a 2 en  $\mathcal{A}$ . Entonces dado que todos los sumandos son positivos o infinito:

$$\mu\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu_n(A_m) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A_m) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(A_m).$$

- b) Consideremos  $f = \sum_{m=1}^M \alpha_m \cdot \mathbb{1}_{A_m}$  con  $\{A_1, \dots, A_M\} \subseteq \mathcal{A}$  y  $\alpha_m \geq 0$ ,  $m = 1, \dots, M$ . Entonces:

$$\begin{aligned} I_\mu(f) &= \sum_{m=1}^M \alpha_m \cdot \mu(A_m) = \sum_{m=1}^M \alpha_m \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A_m), \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^M \alpha_m \cdot \mu_n(A_m) = \sum_{n \in \mathbb{N}} I_{\mu_n}(f). \end{aligned}$$

Entonces el resultado es cierto para las funciones simples positivas.

Sea  $f \geq 0$  en  $L^1_\mu$ . Sabemos que existe una familia creciente  $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  de funciones simples que aproximan a  $f$ . Por Fatou Beppo Levi para  $\mu$  y  $\mu_n$  y dado que todos los sumandos son finitos y positivos tenemos que:

$$\begin{aligned} I_\mu(f) &= \sup_{m \in \mathbb{N}} I_\mu(f_m) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} I_{\mu_n}(f_m) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^N I_{\mu_n}(f_m), \\ &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^N I_{\mu_n}(f_m) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^N \sup_{m \in \mathbb{N}} I_{\mu_n}(f_m) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^N I_{\mu_n}(f). \end{aligned}$$

Si  $f$  no es positiva, pero en  $L^1_\mu$ , se tiene que  $f = f^+ - f^-$  con  $f^+$  y  $f^-$  son positivas y en  $L^1_\mu$  para las que se cumple el resultado. Por la linealidad y dado que todas las sumas son finitas y positivas se tiene que:

$$I_\mu(f) = I_\mu(f^+) - I_\mu(f^-) = \sum_{n \in \mathbb{N}} I_{\mu_n}(f^+) - \sum_{n \in \mathbb{N}} I_{\mu_n}(f^-) = \sum_{n \in \mathbb{N}} I_{\mu_n}(f^+ - f^-).$$

c) No es correcto. Por ejemplo sea  $X = \{0\}$  y  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{0\}\}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  se define  $\mu_n(\emptyset) = 0$  y  $\mu_n(\{0\}) = 1$ . Entonces  $\mu(\{0\}) = \infty$  y  $\mu(\emptyset) = 0$  que obviamente no es  $\sigma$ -finita.

3. Una función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice Stieltjes si es no decreciente y continua por la derecha. Consideramos  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  el Espacio de Medida de los Borelianos de  $\mathbb{R}$ .

a) Sea  $\mu$  una medida finita sobre  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  se define  $F_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$F_\mu(x) = \begin{cases} \mu([0, x]) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -\mu([x, 0]) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Pruebe que  $F_\mu$  es Stieltjes.

b) Se define  $\mathcal{S} = \{]a, b]/a, b \in \mathbb{R}\}$ . Sea  $\nu : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida como  $\nu_F(]a, b]) = F(b) - F(a)$ . Considere  $\mathcal{E}$  el conjunto de uniones finitas disjuntas de  $\mathcal{S} \cup \{]-\infty, b]/b \in \mathbb{R}\} \cup \{]a, \infty[ / a \in \mathbb{R}\}$ . Pruebe que  $\mathcal{E}$  es un álgebra y que existe una única extensión de  $\nu_F$  a  $\mathcal{E}$  que notaremos  $\tilde{\nu}_F$ .

**HINT:** Recuerde la construcción de la  $\sigma$ -álgebra producto. Dado  $E = \bigcup_{i=1}^n ]a_i, b_i]$  defina  $\tilde{\nu}_F(E) = \sum_{i=1}^n \nu_F(]a_i, b_i])$ .

c) Argumente que  $\tilde{\nu}_F : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tiene una extensión única a  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ .

**HINT:** Recuerde el Teorema de la Clase Monótona

d) Establezca la relación que existe entre las medidas de  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  y las funciones Stieltjes.

**Solución:**

a) Si  $x \leq 0 \leq y$  se tiene que  $F_\mu(x) \leq 0 \leq F_\mu(y)$ .

Si  $0 < x \leq y$  entonces  $]0, x] \subseteq ]0, y]$  y por tanto:

$$F_\mu(x) = \mu(]0, x]) \leq \mu(]0, y]) = F_\mu(y).$$

Si  $x \leq y < 0$  entonces  $]y, 0] \subseteq ]x, 0]$  y por tanto:

$$F_\mu(x) = -\mu([x, 0]) \leq -\mu([y, 0]) = F_\mu(y).$$

Esto prueba que  $F_\mu$  es no decreciente.

Sea  $x \geq 0$  y  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  secuencia decreciente a  $x$ . Entonces  $\{[0, x_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente a  $\{[0, x]\}$  si  $x > 0$  y a  $\emptyset$  si  $x = 0$ . Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu([0, x_n]) = \mu([0, x]) = F_\mu(x)$  puesto que  $F_\mu(0) = 0$ .

Sea  $x < 0$  y  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  secuencia decreciente a  $x$ . Entonces  $\{[x_n, 0]\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente a  $\{[x, 0]\}$  y por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu([x_n, 0]) = \mu([x, 0]) = F_\mu(x)$ .

- b) Dado que  $] - \infty, a[ \cup ]a, -\infty[ = \mathbb{R}$  y  $\phi = ]a, a[$  entonces  $\{\mathbb{R}, \phi\} \subseteq \mathcal{E}$ . Dados  $]a, b[$  y  $]c, d[$ ,  $]a, b[ \cap ]c, d[ = ]\max\{a, c\}, \min\{b, d\}[$  (que es vacío si  $\max\{a, c\} > \min\{b, d\}$ ) por lo que  $\mathcal{E}$  es cerrada para intersecciones finitas (inductivamente).

Consideremos  $\biguplus_{n=1}^N ]a_n, b_n[ \in \mathcal{E}$  en el caso en que  $a_n < b_n$  con  $n = 1, \dots, N$ . Al reordenar los intervalos, podemos asumir que  $a_1 < a_2 < \dots < a_N$  y que  $b_n < a_{n+1}$  con  $n = 1, \dots, N-1$ .

En este caso es simple observar que:

$$\left( \biguplus_{n=1}^N ]a_n, b_n[ \right)^c = ] - \infty, a_1[ \cup \bigcup_{n=1}^{N-1} ]b_n, a_{n+1}[ \cup ]b_N, \infty[ \in \mathcal{E}.$$

Al combinar la propiedad de cerradura por complemento e intersección finita se concluye que la familia es cerrada para uniones finitas.

Se define  $\nu_F([a, b]) = F(b) - F(a)$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $\tilde{\nu}_F\left(\biguplus_{n=1}^N ]a_n, b_n[ \right) = \sum_{n=1}^N \nu_F([a_n, b_n])$ .

Se define  $\nu_F([a, \infty[) = \lim_{b \rightarrow \infty} \nu_F([a, b])$  y  $\nu_F(]-\infty, b]) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \nu_F([a, b])$  que podrían ser infinito.

Consideremos una familia  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^N$  tal que  $a = a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_N < b_N = b$ . Es decir,  $[a, b] = \biguplus_{n=1}^N ]a_n, b_n[$ . Entonces tendremos que por la propiedad telescópica de la suma:

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_F\left(\biguplus_{n=1}^N ]a_n, b_n]\right) &= \sum_{n=1}^N \nu_F(]a_n, b_n]) = \sum_{n=1}^N (F(b_n) - F(a_n)), \\ &= F(b) - F(a) = \nu_F(]a, b]).\end{aligned}$$

El caso  $a = -\infty$  o  $b = \infty$  es análogo.

Esto demuestra que  $\tilde{\nu}_F$  esta bien definida de manera única y además es una extensión de  $\nu$ .

- c) Por Teorema de la Clase Monótona, siendo  $\mathcal{E}$  un álgebra, la clase monótona generada coincide con la  $\sigma$ -álgebra generada. Como  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} ]a, b - \frac{1}{n}] = ]a, b[$  y esta familia genera a los abiertos, se concluye que  $\mathcal{E}$  genera  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ .

Al tener una fórmula para la unión finita de intervalos se pasa al límite para obtener la extensión al caso numerable.

- d) Si consideramos una medida boreliana  $\mu$ ,  $\sigma$ -finita sobre  $\mathbb{R}$ , entonces como en la primera parte se puede asociar a una función Stieltjes  $F_\mu$  tal que  $F_\mu(0) = 0$ . Toda función de Stieltjes genera una medida  $\sigma$ -finita  $\mu_F$  sobre los borelianos.