Control de Teoría de la Medida

1. Sea (X, d) un espacio métrico y $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un Espacio de Medida sobre los Borelianos. Si μ no es finita, asuma que existen dos secuencias crecientes a X, $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que:

   - $\forall n \in \mathbb{N}$, K_n es compacto, $\mu(K_n) < \infty$
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n es abierto, $\mu(X_n) < \infty$

   Pruebe que dado $B \in \mathcal{B}$:

   a) Si μ es finita entonces $\forall \epsilon > 0$ existe un cerrado V y un abierto U tal que $V \subseteq B \subseteq U$ y $\mu(U \backslash V) < \epsilon$.

      HINT: Muestre que el conjunto de elementos en $\mathcal{B}$ que cumplen lo anterior es una σ-álgebra.

   b) Si $\mu(B) < \infty$ entonces $\forall \epsilon > 0$ existe un compacto K y un abierto U tal que $K \subseteq B \subseteq U$ y $\mu(U \backslash K) < \epsilon$

      HINT: Considere las medidas traza sobre X_n y K_n y considere $\mu(U \backslash B)$ y $\mu(B \backslash K)$ por separado.

   c) Se dice que μ es regular si para cualquier $B \in \mathcal{B}$:

      $$\mu(B) = \sup\{\mu(K)/K \subseteq B, K \text{ compacto}\} = \inf\{\mu(U)/B \subseteq U, U \text{ abierto}\}.$$

      Pruebe que μ es regular

2. Sea $(X, \mathcal{A})$ un Espacio de Medida y $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de medidas sobre $\mathcal{A}$. Se define $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como $\mu(A) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A)$.

   a) Pruebe que μ es medida.

   b) Pruebe que dada $f \in L^1_\mu$, $f \geq 0$ implica que $\int f\, d\mu = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int f\, d\mu_n$. Esto se puede extender al caso en que f no es positiva?.

   c) Si la familia $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es σ-finita es necesariamente μ σ-finita?

3. Una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice Stieltjes si es no decreciente y continua por la derecha. Consideramos $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ el Espacio de Medida de los Borelianos de $\mathbb{R}$.

a) Sea μ una medida finita sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ se define $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como:

$$F_\mu(x) = \begin{cases} \mu(]0,x]) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -\mu(]x,0]) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Pruebe que F_μ es Stieltjes.

b) Se define $\mathcal{S} = \{]a,b]/a,b \in \mathbb{R}\}$. Sea $\nu : S \to \mathbb{R}^+$ definida como $\nu_F(]a,b]) = F(b) - F(a)$. Considere $\mathcal{E}$ el conjunto de uniones finitas disjuntas de $\mathcal{S}$. Pruebe que $\mathcal{E}$ es un álgebra y que existe una única extensión de ν_F a $\mathcal{E}$ que notaremos ν_F.

HINT: Recuerde la construcción de la σ-álgebra producto. Dado $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n}]a_i, b_i]$ defina $\tilde{\nu}_F(E) = \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_F(]a_i, b_i])$.

c) Argumente que $\tilde{\nu}_F : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ tiene una extensión única a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
HINT: Recuerde el Teorema de la Clase Monótona

d) Establezca la relación que existe entre las medidas de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y las funciones Stieltjes.