AUXILIAR 5: ANÁLISIS MA608-1

PROFESOR: CARLOS CONCA

AUXILIARES: AMITAI LINKER - FRANCISCO UNDA
19 DE ABRIL DE 2011

P1. Sea (X, σ) un espacio topológico, definimos la relación $\sim$ como

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{no existen } A, B \in \sigma, A \cup B = X, A \cap B = \emptyset, x \in A \wedge y \in B$$

- (a) Muestre que $\sim$ es relación de equivalencia. Llamaremos a sus clases de equivalencia las cuasi componentes conexas de X
- (b) Muestre que la clase de equivalencia de x , $[x]$ corresponde a la intersección de todos los abiertos cerrados que contienen a x
- (c) Muestre que si C es (cuasi) componente conexa de X , entonces $C \times \{a\}$ es (cuasi) componente conexa de $X \times \{a\}$
- (d) Muestre que si $x_1 \sim x_2$ en X y $y_1 \sim y_2$ en Y , entonces $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ en $X \times Y$ (con la topología producto)
- (e) Muestre que cada componente conexa de X está contenida en una cuasi componente conexa de X
- (f) Defina los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}^2$:
 - i. $L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = -1\}$
 - ii. $L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 1\}$
 - iii. $R_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq \frac{n}{n+1}, |y| \leq n\}$
 - iv. $Y = L_1 \cup L_2 \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \partial(R_n)$

Muestre que la componente conexa de $(-1, 0)$ en Y es L_1 , mientras que su cuasi componente conexa es $L_1 \cup L_2$

P2. Sea E un espacio topológico separado, y $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de compactos no vacíos. Sea $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$:

- (a) Sea $P \subseteq E$ un compacto no conexo. Muestre que existen abiertos disjuntos U y V tales que $P \subseteq U \cup V$, $P \cap U \neq \emptyset$ y $P \cap V \neq \emptyset$
- (b) Muestre que K es un compacto no vacío en E , y que si $K \subseteq V$ es un abierto, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \subseteq V$
- (c) Suponga además que K_n es conexo $\forall n \in \mathbb{N}$. Muestre que K es conexo
- (d) Muestre que la hipótesis de compacidad es necesaria para el resultado anterior

P3. Diremos que una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es semi-continua inferior si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}((-\infty, \lambda])$ es cerrado en X . Muestre que si X es compacto, entonces la función alcanza su mínimo.

Soluciones:

- P1.** (a) i. Refleja: Debemos probar que no existen A, B abiertos, con $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$ tales que $x \in A$ y $x \in B$, pero esto es obvio, pues si x está en ambos conjuntos, $x \in A \cap B$, luego la intersección no sería vacía.
- ii. Simétrica: Directo de la simetría de la definición
- iii. Transitiva: Supongamos que $x \sim y$ y que $y \sim z$, queremos ver que $x \sim z$. Por contradicción, supongamos que existen abiertos A y B con $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$ tales que $x \in A$ y $z \in B$. Como $A \cup B = X$, entonces y debe estar en A o en B . Supongamos que y está en A :

Si y está en A , entonces hemos encontrado los conjuntos abiertos A y B que particionan el espacio, $y \in A$ y $z \in B$, lo que no puede ser pues contradice $y \sim z$. El caso $y \in B$ es análogo, luego se deduce que no existen A y B abiertos que particionen el espacio con $x \in A$ y $z \in B$, es decir, $x \sim z$

- (b) Queremos probar que $[x] = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_x} U$, con $\mathcal{U}_x = \{U \text{ abiertos cerrados}, x \in U\}$:

$\subseteq$ Sea $y \sim x$, y sea U un abierto cerrado que contiene a x , debemos probar que $y \in U$:

En efecto, si y no estuviese en U , que es abierto, entonces estaría en U^c que también es abierto, luego habríamos encontrado dos abiertos que particionan el espacio y tales que $x \in U$ y $y \in U^c$, lo que contradice que $x \sim y$

$\supseteq$ Sea $y \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_x} U$, debemos ver que $x \sim y$:

En efecto, supongamos que existen $x \in A$ y $x \notin B$ abiertos tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$. Esto significa que $B = A^c$, de donde A es abierto y cerrado que contiene a x , y entonces $y \in A$, luego $y \notin B$, de donde $x \sim y$

- (c) Sea U un abierto de $X \times \{a\}$, luego, $U = \bigcup (V_i \times \{a\}) = (\bigcup V_i) \times \{a\} = V \times \{a\}$ con V un abierto de X . Lo mismo puede decirse de los cerrados.

Sea un abierto cerrado que contiene a (x, a) , luego tiene la forma $V \times \{a\}$ con V un abierto cerrado que contiene a x . Así

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}_{(x,a)}} U = \bigcap_{V \in \mathcal{U}_x} V \times \{a\}$$

Lo que muestra que la cuasi componente de (x, a) es la cuasi componente de x producto con $\{a\}$.

Ahora, si C es la componente conexa de x , $C \times \{a\}$ es conexo, pues si contiene a un abierto cerrado, $V \times \{a\}$, V es abierto cerrado de C , lo que no puede ser. Además es maximal para la inclusión, pues si $C \times \{a\} \subseteq V \times \{a\}$, entonces $C \times V$, siendo V conexo, lo que no puede ser.

- (d) Probaremos que $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_1)$:

Sean A y B dos abiertos en $X \times Y$ tales que $A \cup B = X \times Y$, $A \cap B = \emptyset$ y $(x_1, y_1) \in A$, $(x_2, y_1) \in B$. Podemos intersectar estos abiertos con $X \times \{y_1\}$, para obtener dos abiertos A' y B' en $X \times \{y_1\}$ tales que $A' \cup B' = X \times \{y_1\}$, $A' \cap B' = \emptyset$, $(x_1, y_1) \in A'$ y $(x_2, y_1) \in B'$.

Por el resultado anterior, como $x_1 \sim x_2$ en X , entonces $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_1)$ en $X \times \{y_1\}$, pero entonces lo anterior no puede ser, pues contradice esto último. Así, se concluye que $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_1)$ en $X \times Y$.

En un procedimiento análogo, se puede probar que $(x_2, y_1) \sim (x_2, y_2)$, de donde se concluye el resultado por transitividad

(e) Sea C la componente conexa de x , veamos que si $y \in C$, entonces $x \sim y$:

Por contradicción, sean A y B abiertos que particionan X , con $x \in A$ e $y \in B$, podemos tomar entonces $A \cap C$ y $B \cap C$ que son abiertos en C que lo particionan, con $x \in A \cap C$ y $y \in B \cap C$ (x e y pertenecen a C por hipótesis), luego, son ambos abiertos no vacíos y particionan C , lo que no puede ser, pues C es conexo.

(f) Para poder demostrar estas afirmaciones, necesitamos algunos resultados previos:

- L_1 y L_2 son conexos: Esto es directo de que $\mathbb{R}$ es conexo, de que $L_1 = \{-1\} \times \mathbb{R}$, $L_2 = \{1\} \times \mathbb{R}$ y de la parte *c* del ejercicio
- Los intervalos de la forma $[a, b]$ son conexos
- Los conjuntos ∂R_n son conexos: En efecto, basta notar que $\partial R_n = ([-\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}] \times \{n\}) \cup ([-\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}] \times \{-n\}) \cup (\{\frac{n}{n+1}\} \times [-n, n]) \cup (\{-\frac{n}{n+1}\} \times [-n, n])$ y como las intersecciones son no vacías, se concluye el resultado
- Los conjuntos ∂R_n son abiertos y cerrados en Y : Para mostrar que ∂R_n es abierto y cerrado consideramos el conjunto

$$A_{\epsilon, n} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{n-1}{n} + \epsilon < |x| < \frac{n+1}{n+2} + \epsilon, n-1 + \epsilon < |y| < n+1 - \epsilon\}$$

Que para valores pequeños de ϵ cumple que $A_{\epsilon, n} \cap Y = \partial R_n$, luego, como $A_{\epsilon, n}$ es abierto, R_n es abierto en Y . Considerando ahora $\bar{A}_{\epsilon, n}$, se sigue que $\bar{A}_{\epsilon, n} \cap Y = \partial R_n$, y entonces ∂R_n es cerrado.

- Si U es abierto y cerrado que contiene a x , entonces contiene a cualquier conjunto conexo C que contenga a x : En efecto, si no es así, existe $y \in C$ con $y \notin U$. Considerando U y U^c , se tendrá que $U \cap C$ y $U^c \cap C$ es partición no vacía y abierta de C , lo que no puede ser, pues C es conexo.

Demostremos entonces la proposición:

L_1 componente conexa de $x = (-1, 0)$ Sea C_x la componente conexa de x . De la definición de componente conexa, como L_1 es un conjunto conexo, necesariamente $L_1 \subseteq C_x$. Ahora, supongamos que existe $y \in \partial R_n$ con $y \in C_x$. Como $C_x = C_y$ y ∂R_n es conexo, $\partial R_n \subset C_x$, pero esto no puede ser pues ∂R_n es abierto y cerrado en Y , luego en C_x .

Así, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\partial R_n \cap C_x = \emptyset$. De la definición de Y , y como L_2 es conexo, necesariamente $C_x = L_1$ o $C_x = L_1 \cup L_2$, pero esto último no puede ser, pues L_2 es abierto y cerrado en $L_1 \cup L_2$. Se concluye que la componente conexa de $(-1, 0)$ es L_1

$L_1 \cup L_2$ cuasi componente conexa de $x = (-1, 0)$ De la parte *b*, la cuasi componente conexa corresponde a la intersección de todos los abiertos cerrados que contienen a x . Sea U un abierto cerrado que contenga a x . De las consideraciones anteriores, debe contener a L_1 que es un conjunto conexo que contiene a x . Así, $L_1 \subseteq U$.

Como U es abierto, es la traza de algún abierto A en $\mathbb{R}^2$, esto es, $U = A \cap Y$, y como $x \in A$, existe una bola $B(x, \epsilon)$ en A . Así, $B(x, \epsilon) \cap Y \subseteq U$. Ahora, dado que $\{x_n\} = \{(-\frac{n}{n+1}, 0)\} \subseteq Y$ es una sucesión que tiende a x , debe existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N, x_n \in B(x, \epsilon) \cap Y$.

Notemos que cada x_n está en ∂R_n , luego, como son conjuntos conexos, cada ∂R_n está contenido en U .

Ahora, la sucesión $\{y_n\}_{n \geq N} = \{(\frac{n}{n+1}, 0)\}_{n \geq N}$ está en U y tiende a $(1, 0)$. Ahora, como U es cerrado, esto implica que $(1, 0)$ está en U , y entonces L_2 que es un conjunto conexo que lo contiene también.

Hemos probado que para cada U abierto cerrado, $L_1 \cup L_2 \subseteq U$, luego $L_1 \cup L_2 \subseteq Q_x$ con Q_x la componente conexa de x .

Falta ahora ver que se tiene la igualdad. Para ello, basta notar que $P_n = \bigcup_{i=0}^n \partial R_i$ es un abierto

cerrado en Y , luego $Y - P_n$ es abierto cerrado que contiene a x y $\bigcap_{i=0}^{\infty} (Y - P_i) = L_1 \cup L_2$. Así, como

$$Q_x \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} (Y - P_i), \text{ se tendrá el resultado}$$

- P2.** (a) Dado que P es no conexo, existen dos cerrados F_1, F_2 en la topología traza de P tales que $F_1 \cup F_2 = P$, y $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, ambos no vacíos. Ahora, P es compacto en un Hausdorff, por lo que es cerrado, y entonces F_1 y F_2 son cerrados en E , y como son subconjuntos de P , son compactos. Así, P se puede ver como la unión disjunta de dos compactos. Probemos que existen abiertos U y V disjuntos tales que $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$ (lo que prueba la demostración):

Sea $x \in F_2$ fijo cualquiera y tomemos un $y \in F_1$. Como el espacio es Hausdorff, existen A_y y B_y abiertos disjuntos, $x \in A_y$, $y \in B_y$. Consideremos para cada $y \in F_1$ los conjuntos A_y y B_y como antes.

Es claro que $\bigcup_{y \in F_1} B_y$ es un recubrimiento abierto de F_1 , luego, como F_1 es compacto, existe un sub-

recubrimiento finito, digamos $U_x = \bigcup_{i=1}^n B_{y_i} \supseteq F_1$. Consideremos entonces el conjunto $V_x = \bigcap_{i=1}^n A_{y_i}$

que es un abierto no vacío (pues x pertenece a cada uno de ellos).

Veamos que $V_x \cap U_x = \emptyset$: En efecto, sea $z \in V_x \cap U_x$. Como $z \in U_x$, existe i tal que $z \in B_{y_i}$. Ahora, como $z \in V_x$, en particular pertenece a A_{y_i} , pero esto no puede ser, pues $A_{y_i} \cap B_{y_i} = \emptyset$.

Sabemos que $x \in V_x$, ahora, $\bigcup_{x \in F_2} V_x$ es un recubrimiento abierto de F_2 que es un compacto, por lo que

existe un subrecubrimiento de F_2 , $V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ que es abierto. Podemos entonces tomar $U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$

que es un abierto que contiene a F_1 . Es sencillo mostrar que ambos abiertos son disjuntos. Hemos encontrado así $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$ con $U \cap V = \emptyset$

- (b) Como K es la intersección de cerrados, es un cerrado, y como es subconjunto de K_1 que es compacto, es compacto. Es no vacío, pues los K_n son una familia de cerrados (pues el espacio es Hausdorff)

que posee la propiedad de la intersección finita. Veamos ahora que si $K \subseteq V$ con V abierto, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \subseteq V$:

En efecto, si no fuese así, se tendría que para cada $n \in \mathbb{N}$, $K_n \cap V^c \neq \emptyset$. Como V es abierto, V^c es un cerrado, y cada $V^c \cap K_n$ es un cerrado subconjunto de un compacto, luego es compacto. Además es decreciente pues la familia K_n lo es. Ahora, si $\{n_j\}_{j=1}^m$ es una secuencia creciente de naturales, $\bigcap_{j=1}^m (V^c \cap K_{n_j}) = V^c \cap \bigcap_{j=1}^m K_{n_j} = V^c \cap K_{n_m} \neq \emptyset$. Así, hemos encontrado una familia de compactos con la propiedad de la intersección finita, por lo que su intersección es no vacía, esto es:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (V^c \cap K_n) = V^c \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = V^c \cap K \neq \emptyset$$

Lo que no puede ser, pues $K \subseteq V$. Así, se concluye que debe existir $n \in \mathbb{N}$ con $K_n \subseteq V$

- (c) Supongamos que K no es conexo, luego, por la parte *a*, existen U y V disjuntos con $K \subseteq U \cup V$. Por la parte anterior, existe $K_n \subseteq U \cup V$. Ahora, como $U \cap K$ y $V \cap K$ son no vacíos, $U \cap K_n$ y $V \cap K_n$ son no vacíos, disjuntos y $K_n \subseteq U \cup V$, lo que no puede ser, pues K_n es conexo. Concluimos que K es conexo.
- (d) Veamos un contraejemplo: Consideremos los conjuntos

$$F_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 1, y \geq n\}$$

Y los conjuntos $K_n = L_1 \cup L_2 \cup F_n$, con L_1 y L_2 los conjuntos del problema anterior. Es claro que es decreciente, pero $\bigcap K_n = L_1 \cup L_2$ que no es conexo.

P3. Dotemos a $\mathbb{R}$ de la topología τ en que $\tau = \{(\lambda, \infty), \lambda \in \mathbb{R}\}$, es claro que para esta topología los cerrados son de la forma $(-\infty, \lambda]$, luego, para esta topología f es continua, y por lo tanto $f(X)$ es un compacto en $(\mathbb{R}, \tau)$.

Falta ahora caracterizar los compactos en esta topología:

- Los compactos son acotados inferiormente: En efecto, consideremos el recubrimiento del espacio $\{(-n, \infty)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Si K es un compacto de $\mathbb{R}$, entonces existe un subrecubrimiento finito de K , digamos $\{(-n_i, \infty)\}_{i=1}^n$. Basta entonces tomar el máximo n_i , y entonces $K \subseteq (-n_i, \infty)$, es decir, K es acotado inferiormente.
- Los compactos alcanzan su ínfimo: En efecto, sea $z = \inf(K)$, luego, si no alcanzara su ínfimo, podríamos tomar el recubrimiento $\{(z + \frac{1}{n}, \infty)\}_{n \in \mathbb{N}}$, y entonces podríamos tomar un subrecubrimiento finito. Sea m el máximo índice del subrecubrimiento, luego, $K \subseteq (z + \frac{1}{m}, \infty)$, lo que no puede ser, por definición de ínfimo.

Se concluye que los compactos son acotados que alcanzan su ínfimo, y entonces $f(X)$ cumple esta condición, de donde f alcanza su mínimo.