Pauta auxiliar 8: Análisis Funcional

Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Gonzalo Contador - Felipe Subiabre
8 de junio de 2011

P1. Hecho en clases.

P2. Como los E_n son mutuamente ortogonales, para probar que $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ basta ver que $\left\langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right\rangle$ es denso en H. Sea $F := \overline{\left\langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right\rangle}$.

Sea $u \in H$, denotemos $u_n = P_{E_n}u,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Por caracterización de proyección sobre un subespacio se tiene $(u - u_k, v) = 0\ \forall v \in E_k$, y en particular para $v = u_k \in E_k$,

$$(u, u_k) = |u_k|^2.$$

Sumando sobre $k = 1, \ldots, n$ se tiene por ortogonalidad

$$(u, S_n) = \sum_{k=1}^{n} |u_k|^2 = |S_n|^2$$

luego por Cauchy–Schwartz $|S_n| \leq |u|\ \forall n \in \mathbb{N}$. Sigue que

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k|^2 \leq |u|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y entonces la sucesión S_n es de Cauchy en H (en efecto, $|S_n - S_m|^2 = \sum_{k=m}^{n} |u_k|^2$, y la suma de la derecha se va a cero cuando $m, n \to \infty$ por lo anterior), sea S su límite. Notemos que para $m \leq n$, por ortogonalidad se cumple

$$(u - S_n, v) = 0 \quad \forall v \in E_m$$

y tomando límite en n se obtiene que

$$(u - S, v) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}, v \in E_m$$

y por linealidad y continuidad de $(u - S, \cdot)$ y la definición de F se tiene

$$(u - S, v) = 0 \quad \forall v \in F$$

lo que corresponde a la caracterización de S como proyección de u sobre F, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P_{E_k}u = P_F u \quad \forall u \in H,$$

y por ortogonalidad

$$\sum_{n\in N} |P_{E_n}u|^2 = |P_F u|^2 \quad \forall u \in H.$$

Luego $\forall u \in D,\ |P_F u|^2 + |P_{F^\perp}u|^2 = |u|^2 = \sum\limits_{n\in N} |P_{E_n}u|^2 = |P_F u|^2$, lo que implica que $P_{F^\perp}u = 0\ \forall u \in D$, y por linealidad de la proyección y densidad de $\langle D\rangle$ se obtiene $P_{F^\perp}u = 0\ \forall u \in H$, es decir, $F^\perp = \{0\}$, lo que implica que $F = H$, i.e. $\left\langle \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \right\rangle$ es denso en H.

P3. a) Es fácil ver que si H es separable y V es denso en H entonces V es separable. Sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ denso, luego $F_n := \langle\{v_1, \ldots, v_n\}\rangle$ es una secuencia creciente de subespacios vectoriales de V cuya unión es densa en V pues contiene a $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Además por el método de Gram–Schmidt se puede encontrar una secuencia ortonormal $(e_n)_{n\in I} \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n,\ I \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\langle\{e_n\}_{n\in I}\rangle = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Luego $\overline{\langle\{e_n\}_{n\in I}\rangle} = \overline{\overline{\langle\{e_n\}_{n\in I}\rangle}} = \overline{\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n}} = \overline{V} = H$, con lo que $(e_n)_{n\in I}$ es una base ortonormal de H.

b) Consideramos el subespacio cerrado $F := \overline{\langle\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle}$. Por construcción $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es base ortonormal de F, y $F^\perp$ es también un subespacio cerrado de H, por lo que es separable. Luego existe una base ortonormal $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F^\perp$ de $F^\perp$, y por perpendicularidad de F y $F^\perp$ se tiene que $(e_n, f_m) = 0\ \forall m, n \in \mathbb{N}$. Con esto y el hecho de que $H = F + F^\perp$ es fácil ver que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de H que completa a $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Por Teorema de Riesz basta ver que $(u, e_n) \to 0\ \forall u \in H$. Sea $u \in H$, por ser los e_n base ortonormal se sabe que $|u|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |(u, e_n)|^2$, para lo que es necesario que $|(u, e_n)|^2 \to 0$.

Para ver que $|u_n| \to 0$ notamos que por ortonormalidad

$$|u_n|^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \frac{1}{n^2}\cdot nC^2 = \frac{C^2}{n} \to 0$$

donde C es tal que $|a_n| \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}$.

e) Definamos $v_n := \sqrt{n}u_n$ y notemos que

$$(v_n, e_i) = \begin{cases} \dfrac{a_i}{\sqrt{n}}, & \text{si } i \leq n \\ 0, & \text{si } i > n \end{cases}$$

Sea $w \in H$, podemos escribir $w = \sum\limits_{i=1}^{\infty} w_i e_i$, con $|w|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} w_i^2$. Luego para $\varepsilon > 0$ existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{i>n_0} w_i^2 \leq \varepsilon$. Entonces para $n > n_0$:

$$\begin{aligned}
(v_n, w) &= \sum_{i=1}^{n_0} (v_n, e_i) w_i + \sum_{i>n_0} (v_n, e_i) w_i \\
\implies |(v_n, w)| &\leq \sum_{i=1}^{n_0} |(v_n, e_i) w_i| + \sum_{i>n_0} |(v_n, e_i) w_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n_0} \frac{C|w|}{\sqrt{n}} + \sqrt{\sum_{i>n_0} (v_n, e_i)^2} \sqrt{\sum_{i>n_0} w_i^2} \\
&\leq \frac{C|w| n_0}{\sqrt{n}} + \varepsilon \sqrt{\sum_{i=n_0+1}^{n} \left(\frac{a_i}{\sqrt{n}} \right)^2} \\
&\leq \frac{C|w| n_0}{\sqrt{n}} + \varepsilon \sqrt{\frac{n - n_0}{n} C^2}
\end{aligned}$$

$$\implies \limsup_{n\to\infty} |(v_n, w)| \leq C\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario se concluye que $\limsup\limits_{n\to\infty} |(v_n, w)| = 0$, lo que implica $(v_n, w) \to 0$, es decir, $\sqrt{n} u_n \rightharpoonup 0$.