Pauta Auxiliar 5: Análisis Funcional

Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Gonzalo Contador - Felipe Subiabre

P1. a) A es abierto para la topología fuerte de E^* pues lo es para la topología menos fina $\sigma(E^*, E)$, luego por Hahn-Banach aplicado a E^* existe $\xi \in E^{**}$ no nulo y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle \xi, f \rangle \leq \alpha \leq \langle \xi, g \rangle \ \ \forall f \in A, g \in B.$$

Notemos que esta desigualdad implica en particular que ξ es acotado en cualquier abierto para $\sigma(E^*, E)$ contenido en A, y luego es continuo para esta topología. Sabemos entonces que existe $x \in E, x \neq 0$ tal que ξ es el funcional de evaluación asociado a x, es decir $\langle \xi, f \rangle = \langle f, x \rangle \ \forall f \in E^*$, con lo que se concluye que

$$\langle f, x \rangle \leq \alpha \leq \langle g, x \rangle \ \ \forall f \in A, g \in B.$$

b) Sea $x \notin A + B$. Como para cada $b \in B$ $A + b$ es cerrado y $x \notin A + b$, existe una vecindad convexa $V(b)$ de 0 tal que

$$(x + V(b)) \cap (A + b) = \emptyset.$$

Por compacidad el recubrimiento $\bigcup_{b \in B} b - \frac{1}{2}V(b)$ de B se puede reducir a un cubrimiento $\bigcup_{i \in I} b_i - \frac{1}{2}V(b_i), b_i \in B, I$ finito. Consideremos la vecindad de 0 $V = \frac{1}{2}\bigcap_{i \in I} V(b_i)$ y veamos que $(x + V) \cap (A + B) = \emptyset$. En efecto, si $\exists v \in V$ tal que $x + v \in A + B$ entonces existen $i \in I, v \in V(b_i), w \in V(b_i)$ tal que

$$x + \frac{1}{2}v = A + b_i - \frac{1}{2}w.$$

Luego por convexidad de $V(b_i)$, para $z = \frac{1}{2}(v + w) \in V(b_i)$ se tiene $x + z \in A + b_i$, lo que contradice $(x + V(b_i)) \cap (A + b_i) = \emptyset$.
Por lo tanto $x + W$ es vecindad de x contenida en $(A + B)^c$, por lo que $A + B$ es cerrado.
Observar que sólo se utilizaron propiedades de espacios vectoriales topológicos localmente convexos y no el hecho particular de estar considerando la topología $\sigma(E^*, E)$.

c) Como $A \cap B \neq \emptyset$ se tiene que $0 \notin A - B$. Por la parte anterior y el hecho de que B es convexo compacto si y sólo si $-B$ lo es, se tiene que $A - B$ es cerrado. Luego existe una vecindad V de 0 para la topología $\sigma(E^*, E)$ que no intersecta a $A - B$, y se puede tomar convexa (recordar la base de vecindades de la topología débil-*). Separando V y $A - B$ como en la parte a), existen $x \in E, \alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, x \rangle \leq \alpha \leq \langle g - h, x \rangle \ \ \forall f \in V, g \in A, h \in B.$$

Además V es abierto para la topología fuerte de E^*, luego contiene una bola $B_{E^*}(0, r)$. De esto y el lado izquierdo de la igualdad anterior se obtiene (tomando f un funcional soporte debidamente amplificado):

$$0 < r\,\|x\| \leq \alpha \leq \langle g - h, x \rangle \ \ \forall g \in A, h \in B,$$

lo que implica

$$\langle h, x\rangle < \langle h, x\rangle + r\,\|x\| \leq \langle g, x\rangle \ \ \forall g \in A, h \in B.$$

Pero $\langle h, x\rangle$ es continuo en h para la topología $\sigma(E^*, E)$ (pues es el funcional de evaluación en x) y B es compacto en esta topología, luego existe $h_0 \in B$ que alcanza el máximo:

$$\langle h, x\rangle \leq \langle h_0, x\rangle < \langle h_0, x\rangle + r\,\|x\| \leq \langle g, x\rangle \ \ \forall g \in A, h \in B$$

Con lo que tomando $\alpha' \in (\langle h_0, x\rangle\,, \langle h_0, x\rangle + r\,\|x\|)$ se obtiene la separación estricta

$$\langle h, x\rangle < \alpha' < \langle g, x\rangle \ \ \forall g \in A, h \in B.$$

d) Sean $f, g \in \overline{A}^{\sigma(E^*,E)}$, debemos probar que para cualquier V vecindad abierta de 0 en la topología $\sigma(E^*, E)$ y $t \in [0, 1]$, $(tf + (1-t)g + V) \cap A \neq \emptyset$. Análogamente a lo anterior se puede tomar sin pérdida de generalidad V convexa, con lo que $tf + (1-t)g + V = t(f + V) + (1-t)(g + V)$. Notamos que $f + V$ y $g + V$ son abiertos que intersectan a A, luego existen $a \in (f + V) \cap A, b \in (g + V) \cap A$, y por convexidad de A y definición del conjunto suma se tiene $ta + (1-t)b \in t(f + V) + (1-t)(g + V) \cap A$.

P2. a) Notemos que

$$N^{\perp\perp} = \left\{f \in E^* : \langle f, x\rangle = 0 \ \forall x \in N^{\perp}\right\} = \bigcap_{x \in N^{\perp}} \ker(J(x))$$

que es cerrado para la topología $\sigma(E^*, E)$. Además sabemos que $N \subseteq N^{\perp\perp}$, por lo que tomando adherencia $\sigma(E^*, E)$ obtenemos $\overline{N}^{\sigma(E^*,E)} \subseteq N^{\perp\perp}$.

Para la segunda inclusión, notemos que $\overline{N}^{\sigma(E^*,E)}$ es convexo cerrado para $\sigma(E^*, E)$ por la parte d) del problema 1. Si existe $f_0 \in N^{\perp\perp}$ que no pertenece a $\overline{N}^{\sigma(E^*,E)}$, podemos aplicar la parte c) del problema 1 para separar el convexo compacto $\{f_0\}$ de $\overline{N}^{\sigma(E^*,E)}$: existen $x \in E, \alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, x\rangle < \alpha < \langle f_0, x\rangle \ \ \forall f \in \overline{N}^{\sigma(E^*,E)}.$$

Si $N = \{0\}$ el resultado pedido es inmediato. En caso contrario, $\overline{N}^{\sigma(E^*,E)}$ es un espacio vectorial no trivial, y la cota superior α en $\langle f, x\rangle$ implica que $\langle f, x\rangle = 0 \ \forall f \in \overline{N}^{\sigma(E^*,E)} \supseteq N$ (si no, reescalando se obtiene una contradicción), es decir, $x \in N^{\perp}$. Pero entonces $\langle f_0, x\rangle = 0$ pues $f_0 \in N^{\perp\perp}$, con lo que se obtiene

$$0 < \alpha < 0,$$

absurdo.

b) $\overline{J(B_E)}^{\sigma(E^{**},E^*)}$ es convexo cerrado para $\sigma(E^{**}, E^*)$ por la parte d) del problema 1. Si existe $\xi \in B_{E^{**}}$ que no pertenece a $\overline{J(B_E)}^{\sigma(E^{**},E^*)}$, nuevamente aplicamos la parte c) del problema 1 sobre E^{**} para separar $\{\xi\}$ de $\overline{J(B_E)}^{\sigma(E^{**},E^*)}$, i.e., $\exists f \in E^*, \alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle g, f\rangle < \alpha < \langle \xi, f\rangle \ \ \forall g \in \overline{J(B_E)}^{\sigma(E^{**},E^*)}.$$

En particular esto se cumple para los funcionales de evaluación $g = J(x) \in J(B_E)$:

$$\langle f, x \rangle < \alpha < \langle \xi, f \rangle \ \ \forall x \in B_E$$

lo que implica tomando supremo:

$$\|f\| \leq \alpha < \langle \xi, f \rangle \leq \|f\|$$

pues $\xi \in B_{E^{**}}$, una contradicción.

Observar que esto da una demostración alternativa del Lema de Goldstine a partir del Teorema de Hahn-Banach.

c) Suponiendo que existe $u_0 \in B_E$ tal que $Au_0 \notin \overline{\mathrm{conv} A(S_E)}^{\sigma(E^*,E)}$. Análogamente a la parte anterior separamos $\{Au_0\}$ de $\overline{\mathrm{conv} A(S_E)}^{\sigma(E^*,E)}$ (convexo cerrado para $\sigma(E^*, E)$): existen $x_0 \in E \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle g, x_0 \rangle < \alpha < \langle Au_0, x_0 \rangle \ \ \forall g \in \overline{\mathrm{conv} A(S_E)}^{\sigma(E^*,E)}.$$

En particular para $g = Au \in A(S_E)$:

$$\langle Au, x_0 \rangle < \alpha < \langle Au_0, x_0 \rangle \ \ \forall u \in S_E$$

de donde se deduce $\langle Au - Au_0, x_0 \rangle < 0 \ \forall u \in S_E$, pero por continuidad existe $t > 0$ tal que $\|u_0 + tx_0\| = 1$, y por monotonía de A $\langle A(u + tx_0) - Au_0, x_0 \rangle \geq 0$, nuevamente una contradicción.

P3.

- En el caso E^* separable sabemos que la bola unitaria cerrada B_E es metrizable para la topología débil y el origen pertenece a la adherencia débil de la esfera unitaria $S_E = \{x \in E; \|x\| = 1\} \subseteq B_E$ pues el espacio es de dimensión infinita, lo que nos da una sucesión de elementos de norma 1 que converge débilmente a 0.
- Si E es reflexivo, generamos un subespacio cerrado separable de dimensión infinita tomando un conjunto linealmente independiente y numerable $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. El espacio $E_0 = \overline{\langle \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle}$ es claramente de dimensión infinita y cerrado. Para ver que es separable se toma una aproximación de $x \in E_0$ por un elemento $y \in \langle \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle$ que esté a distancia menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ de x_0, y luego $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} y_n b_n, \ y_n \in \mathbb{R}$ con sólo finitos y_n no nulos, con lo que cambiando los coeficientes por racionales suficientemente cercanos se obtiene $z \in \langle \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle_{\mathbb{Q}}$ (que es un conjunto numerable) tal que $\|z - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Notando que E_0 es reflexivo y separable, tenemos que E_0^* es separable, por lo que podemos aplicar el caso anterior a E_0 y obtener una sucesión $(x_n) \subseteq E_0 \subseteq E$ de norma 1 que converge débil a 0.