

# AUXILIAR 5: ANÁLISIS FUNCIONAL

PROFESOR: MANUEL DEL PINO

AUXILIARES: GONZALO CONTADOR - FELIPE SUBIABRE

29 DE ABRIL DE 2011

## P1. Hahn-Banach para la topología débil-\*

Sea  $E$  un espacio de Banach.

- a) Sean  $A \subseteq E^*$  y  $B \subseteq E^*$  conjuntos convexos no vacíos tal que  $A \cap B = \emptyset$  y  $A$  es abierto en la topología  $\sigma(E^*, E)$ . Pruebe que existe  $x \in E, x \neq 0$ , y una constante  $\alpha$  tal que el hiperplano  $\{f \in E^* : \langle f, x \rangle = \alpha\}$  separa  $A$  y  $B$ .
- b) Suponga que  $A \subseteq E^*$  es cerrado en  $\sigma(E^*, E)$  y  $B \subseteq E^*$  es compacto en  $\sigma(E^*, E)$ . Pruebe que  $A + B$  es cerrado en  $\sigma(E^*, E)$ .
- c) Sean  $A \subseteq E^*$  y  $B \subseteq E^*$  conjuntos convexos no vacíos tal que  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A$  es cerrado en la topología  $\sigma(E^*, E)$  y  $B$  es compacto en  $\sigma(E^*, E)$ . Pruebe que existe  $x \in E, x \neq 0$ , y una constante  $\alpha$  tal que el hiperplano  $\{f \in E^* : \langle f, x \rangle = \alpha\}$  separa  $A$  y  $B$  estrictamente.
- d) Sea  $A \subseteq E^*$  convexo. Pruebe que  $\overline{A}^{\sigma(E^*, E)}$ , la adherencia de  $A$  en  $\sigma(E^*, E)$ , es convexa.

## P2. Aplicaciones de los resultados anteriores

- a) Sea  $N \subseteq E^*$  un subespacio vectorial. Pruebe que  $N^{\perp\perp} = \overline{N}^{\sigma(E^*, E)}$ . ¿Qué se puede decir si  $E$  es reflexivo?  
Deduzca que  $c_0$  es denso en  $\ell^\infty$  en la topología  $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ .
- b) Pruebe que  $J(B_E)$  es denso en  $B_{E^{**}}$  en la topología  $\sigma(E^{**}, E^*)$ .
- c) Sea  $A : B_E \rightarrow E^*$  un operador monótono, es decir

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in B_E.$$

Sea  $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ . Demuestre que  $A(B_E) \subseteq \overline{\text{conv}(A(S_E))}^{\sigma(E^*, E)}$ .

**P3.** Sea  $E$  un espacio de Banach de dimensión infinita que satisface alguna de las siguientes hipótesis:

- a)  $E^*$  es separable
- b)  $E$  es reflexivo

Pruebe que existe una sucesión  $(x_n)$  en  $E$  tal que

$$\|x_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad x_n \rightharpoonup 0$$