Auxiliar 3: Análisis Funcional

Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Gonzalo Contador - Felipe Subiabre
1 de abril de 2011

P1. *Operadores monótonos no lineales localmente acotados.*

a) Sea E un espacio de Banach y $D(A) \subseteq E$ cualquier subconjunto de E. Una función (no necesariamente lineal) $A : D(A) \to E'$ se dice monótona si satisface

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in D(A).$$

Pruebe que para todo $x_0 \in \mathrm{Int}(D(A))$ existen constantes $R > 0$ y C tales que

$$\|Ax\| \leq C \quad \forall x \in D(A) \text{ tal que } \|x - x_0\| < R.$$

b) Sea E espacio de Banach y $T : E \to E'$ un operador lineal que satisface

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in E.$$

Pruebe que T es contínuo.

P2. Sean E, F espacios de Banach y $T : E \to F$ lineal. Considere el operador $T^* : F' \to E'$, el *adjunto* de T, definido por la relación

$$\langle T^*(f), x \rangle = \langle f, T(x) \rangle \quad \forall x \in E, f \in F'.$$

a) Demuestre que $T^* \in \mathcal{L}(F', E')$ si y sólo si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, y en ese caso $\|T^*\| = \|T\|$.

b) Demuestre que T^* es inyectivo si y sólo si $\overline{T(E)} = F$.

P3. Sea $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que:

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \text{ con } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \text{ se tiene que } \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n \text{ es convergente.}$$

Demuestre que la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.