Auxiliar 8: Análisis Funcional

Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Gonzalo Contador - Felipe Subiabre
8 de junio de 2011

Observación: En todos los problemas H es un espacio de Hilbert.

P1. Teorema ergódico de Kakutani-Yosida

Sea $S \in \mathcal{L}(H,H)$ tal que $(Su,u) \geq 0\ \forall u \in H$.

a) Pruebe que $\ker(S) = \mathrm{Im}(S)^{\perp}$.

b) Pruebe que $I + tS$ es biyectivo para todo $t > 0$.

c) Demuestre que
$$\lim_{t\to+\infty}(I+tS)^{-1}f = P_{\ker(S)}f \quad \forall f \in H.$$

Sea ahora $T \in \mathcal{L}(H,H)$ tal que $\|T\| \leq 1$. Dado $f \in H$ se definen

$$\begin{aligned}\sigma_n(f) &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i f,\\ \mu_n(f) &= \left(\frac{I+T}{2}\right)^n f.\end{aligned}$$

Se quiere probar que
$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f) = \lim_{n\to\infty}\mu_n(f) = P_{\ker(I-T)}f.$$

Para ello:

d) Pruebe que $\ker(I-T) = \mathrm{Im}(I-T)^{\perp}$.

e) Demuestre que $\forall f \in \mathrm{Im}(I-T)$ existe una constante C tal que $|\sigma_n(f)| \leq \dfrac{C}{n}$ para $n \geq 1$. Concluya que $\sigma_n(f) \to P_{\ker(I-T)}f \quad \forall f \in H$.

f) Defina $S = \dfrac{I+T}{2}$. Pruebe que
$$|u - Su|^2 + |Su|^2 \leq |u|^2 \quad \forall u \in H.$$
y deduzca que
$$\sum_{i=0}^{\infty}|S^i u - S^{i+1}u|^2 \leq |u|^2 \quad \forall u \in H$$
y que
$$|S^n(u - Su)| \leq \frac{|u|}{\sqrt{n+1}} \quad \forall u \in H, n \geq 1.$$

g) Demuestre que $\forall f \in \mathrm{Im}(I-T)$ existe una constante C tal que $|\mu_n(f)| \leq \dfrac{C}{\sqrt{n}}$ para $n \geq 1$. Deduzca que para todo $f \in H$ se tiene $\mu_n(f) \to P_{\ker(I-T)}f$.

P2. Sea $D \subseteq H$ tal que $\langle D \rangle$ es denso en H. Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios cerrados de H mutuamente ortogonales, y tales que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |P_{E_n} u|^2 = |u|^2 \quad \forall u \in D.$$

Pruebe que H es la suma de Hilbert de los E_n.

P3. Suponga que H es separable.

a) Sea $V \subseteq H$ un subespacio vectorial denso en H. Pruebe que V contiene una base ortonormal de H.

b) Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ una secuencia ortonormal en H, es decir, $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Pruebe que existe una base ortonormal de H que contiene a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{e_n\}$, esto es, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se puede completar a una base ortonormal.

Consideremos $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ una base ortonormal de H y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión acotada. Se define $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$.

c) Muestre que $e_n \rightharpoonup 0$ y que $|u_n| \to 0$.

e) Pruebe que $\sqrt{n}u_n \rightharpoonup 0$.