AUXILIAR 7: ANÁLISIS FUNCIONAL

PROFESOR: MANUEL DEL PINO

AUXILIARES: GONZALO CONTADOR - FELIPE SUBIABRE

13 DE MAYO DE 2011

P1. Completación de un espacio pre-Hilbertiano

Sea E un espacio vectorial dotado del producto interno $(\cdot, \cdot)$ (no se asume que E es completo para la norma inducida, E se llama espacio pre-Hilbertiano).

Recuerde que el espacio dual E^* dotado de la norma dual $\|\cdot\|_{E^*}$ es completo. Sea $T : E \rightarrow E^*$ el operador lineal definido por

$$\langle Tu, v \rangle_{E^*, E} = (u, v) \quad \forall u, v \in E.$$

Compruebe que T es una isometría lineal. ¿Es sobreyectiva?

- Transfiera a $T(E)$ el producto escalar de E y extiéndalo a $\overline{T(E)}$. El producto escalar resultante se denota $((f, g))$ con $f, g \in T(E)$.
- Pruebe que $\overline{T(E)} = E^*$. Deduzca que E^* es un espacio de Hilbert para la norma $\|\cdot\|_{E^*}$.
- Concluya que la completación de E se puede identificar con E^* .

P2. Sea H un espacio de Hilbert y $K \subseteq H$ un subconjunto convexo cerrado no vacío. Sea (u_n) una sucesión en H tal que $\forall v \in K$ la sucesión $(|u_n - v|)$ es decreciente.

- Pruebe que la sucesión $(\text{dist}(u_n, K))$ es decreciente.
- Demuestre que la sucesión $(P_K u_n)$ converge fuertemente a un límite l .
- Asuma que la sucesión (u_n) satisface la propiedad

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Siempre que una subsucesión } (u_{n_k}) \text{ converge} \\ \text{débil a algún límite } \bar{u} \in H, \text{ entonces } \bar{u} \in K. \end{array} \right.$$

Pruebe que $u_n \rightarrow l$ débil.

- Suponga que $\text{int}(K) \neq \emptyset$. Pruebe que existe $u \in H$ tal que $u_n \rightarrow u$ fuerte.
- Defina $\sigma_n := \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$ y suponga que la sucesión (σ_n) satisface la propiedad (P). Demuestre que $\sigma_n \rightarrow l$ débil.

P3. Proyecciones y proyecciones ortogonales

Sea H un espacio de Hilbert. Un operador $P \in \mathcal{L}(H)$ tal que $P^2 = P$ se llama una *proyección*.

- Pruebe que una proyección satisface las siguientes propiedades:
 - $I - P$ es una proyección.
 - $\ker(I - P) = \text{Im}(P)$ y $\ker(P) = \text{Im}(I - P)$.
 - $\ker(P) \cap \ker(I - P) = \{0\}$
 - $H = \ker(P) + \ker(I - P)$.
- Dada una proyección P , pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - $P = P_M$ para algún subespacio cerrado M de H ,
 - $P^* = P$,
 - $\|P\| \leq 1$,
 - $\ker(P) \perp \ker(I - P)$.