

Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

## Auxiliar #6 Análisis Funcional

Profesor: Manuel del Pino

Auxiliares: Gonzalo Contador, Felipe Subiabre.

**P1.** Sea  $E$  espacio métrico. Diremos que  $E$  es uniformemente convexo si  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que para todo par  $x, y \in E$  verificando  $\|x\| < 1, \|y\| < 1, \|x - y\| > \epsilon$  se tiene

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta$$

Demuestre que todo espacio uniformemente convexo es reflexivo.

**P2.** En este problema, revisitaremos algunos resultados del curso de Medida. El objetivo es rehacer el estudio de reflexividad y separabilidad de los espacios  $L^p(\mu)$  utilizando resultados de análisis funcional.

- a) Pruebe que  $L^p(\mu)$  es separable para  $p \in [1, \infty)$
- b) Pruebe que, para  $p \in [2, \infty)$ ,  $f, g \in L^p(\mu)$  se tiene

$$\left\| \frac{f + g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f - g}{2} \right\|_p^p < \frac{1}{2} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)$$

c) Concluya que  $L^p(\mu)$  es uniformemente convexo para  $p \in [2, \infty)$ , y que  $L^p(\mu)$  es reflexivo para  $p \in [1, \infty)$ .

d) Pruebe que  $L^\infty(\mu)$  no es separable. Concluya que  $L^1(\mu)$  y  $L^\infty(\mu)$  no son reflexivos.