Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar #2 Análisis Funcional

Profesor: Manuel Del Pino.

Auxiliares: Gonzalo Contador, Felipe Subiabre.

P1. *Corolario de Hahn-Banach Analítico*

a)Sea E e.v.n.. Demuestre que para cada $x \in E$ existe $f \in E'$ verificando

$$\| f \| = \| x \|$$

$$< f, x > = \| x \|^2$$

¿Es este elemento del dual único para x fijo?

b) En el mismo contexto , definimos para cada $x \in E$ su "aplicación de dualidad" como el conjunto

$$F(x) = \{f \in E' : \| f \| = \| x \|, < f, x > = \| x \|^2\}$$

b.1) Muestre que $F(x) = \{f \in E' : \| f \| \leqslant \| x \|, < f, x > = \| x \|^2\}$. Deduzca que $F(x)$ es convexo y cerrado.

b.2) Muestre que $F(x) = \{f \in E' : \forall y \in E, 2 < f, y - x > \leqslant \| x \|^2 + \| y \|^2\}$ y concluya que, para $f \in F(x)$, $g \in F(y)$ se tiene $< f - g, x - y > \geqslant (\| x \| - \| y \|)^2$.

b.3) ¿Que sucede en el caso E' estrictamente convexo?

P2. Sea E Banach, $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de reales positivos convergiendo a cero, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E'$ y $r > 0$ tal que

$$\forall x \in B(0, r), \exists C_x > 0, \forall n, < f_n, x > \leqslant \varepsilon_n \| f_n \| + C_x$$

Muestre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado en E'