Auxiliar 1: Análisis Funcional

Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Gonzalo Contador - Felipe Subiabre
18 de marzo de 2010

P1. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita.

a) Muestre que existe una base algebraica $(e_i)_{i\in I}$ tal que $\|e_i\| = 1\ \forall i \in I$.

b) Construya una forma lineal f sobre E que no sea contínua.

c) Concluya que I no es numerable.

P2. Sea E un espacio de Banach.

a) Pruebe que la topología débil $\sigma(E; E')$ es separada.

b) Sea F un subespacio vectorial de un espacio de E que verifica la siguiente propiedad:

$$(\forall f \in E')(< f, x >= 0\ \forall x \in F \implies f \equiv 0)$$

Pruebe que F es denso en E. Más aún, pruebe que si $\bar{F} \neq E$ entonces

$$\forall x \in E\backslash\bar{F} \quad \exists f \in E',\ < f, x >\neq 0 \wedge f|_F \equiv 0$$

c) Dado un subconjunto S de E y un subconjunto V de E' se definen sus aniquiladores $S^a \subseteq E'$ y ${}^aV \subseteq E$ como

$$S^a := \{f \in E' :< f, s >= 0\ \forall s \in S\}$$

$${}^aV := \{x \in E :< f, x >= 0\ \forall f \in V\}$$

Pruebe que $S = {}^a(S^a)$ si y sólo si S es un subespacio cerrado de E.

P3. a) Sea F un espacio de Banach y E un espacio topológico. Sean $u, v : E \to F$ contínuas para la topología débil de F. Pruebe que $z := u + v$ es contínua para la topología débil de F.

b) Muestre que un hiperplano $\{f = \alpha\}, f \neq 0$ es cerrado si y sólo si f es contínua.

c) Concluya que un hiperplano de la forma anterior es siempre cerrado o denso en E.