Auxiliar #7 MA3801: Espacios topológico

Profesor: Rafael Correa F.

Auxiliares: Gianfranco Liberona, Pedro Pérez, David Salas, Nikolas Tapia.

Redes Universales

P1. Definición: Sea X un conjunto se dice que $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ una red es **universal** si:

$$(\forall A \subseteq X)((x_\alpha)_{\alpha \in D} \text{ entra seguramente en } A \text{ o en } A^c)$$

Se demostrara ahora que toda red posee una subred universal. Para esto definiremos $\mathcal{A}$ como la familia de $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que cumplen con.

$$\forall A, B \in \mathcal{C} \quad A \cap B \in \mathcal{C}$$

$$\forall A \in \mathcal{C} \quad (x_\alpha)_{\alpha \in D} \text{ entra frecuentemente en } A$$

1.1 Demuestre que $\mathcal{A}$ posee un elemento maximal para $\subseteq$ al que llamaremos $\mathcal{C}^*$.

1.2 Demuestre que $\forall A \in \mathcal{P}(X) \quad A \in \mathcal{C}^* \text{ o } A^c \in \mathcal{C}^*$.

1.3 Demuestre que si $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$. Existe $(y_\delta)_{\delta \in E}$ subred de $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ tal que $\forall A \in \mathcal{C} \quad (y_\delta)_{\delta \in E} \text{ entra seguramente en } A$.

1.4 Concluya.

Topología Cuociente

P2. Sea (X, τ) y R una relacion de equivalencia.

2.1 Si el espacio cuociente X/R es Hausdorff. Entonces R es cerrado.

2.2 Si la proyección es abierta, y R es cerrada entonces X/R es Hausdorff.

Grupos Topológicos

P3. Definición: Una Tripleta $(G, \cdot, \tau)$ es un grupo topologico si y solo si $(G, \cdot)$ es un grupo, (G, τ) es un espacio topológico, y la funcion $\phi : G^2 \rightarrow G \quad \phi(x, y) = x \cdot y^{-1}$ es continua relativa a la topologia producto.

Definición: Si $X, Y \subseteq G$ se define $X^{-1} := \{x \in G : x^{-1} \in X\}$ y $X \cdot Y = \{x \cdot y : x \in X, y \in Y\}$.

3.1 Sea $(G, \cdot)$ un grupo y τ una topologia para G . Entonces son equivalentes:

a $(G, \cdot, \tau)$ es un grupo topológico.

b Para todo $x, y \in G$ y cada vecindad W de $x \cdot y^{-1}$ existen U vecindad de x y V vecindad de y tal que $U \cdot V^{-1} \subseteq W$.

c $i(x) := x^{-1}$ y $m(x, y) := x \cdot y$ son continuas.

3.2 Pruebe que si G es un grupo topológico $i(x) := x^{-1}$, $L_a(x) := a \cdot x$ y $R_a(x) := x \cdot a$, donde $a \in G$ son homeomorfismos en si mismo.

3.3 Si G es un Grupo topológico, sea $\mathcal{U}$ el sistema de vecindades de la identidad. Entonces A es abierto si y solo si $\forall x \in A \quad x^{-1} \cdot A \in \mathcal{U}$ (equivalentemente si $A \cdot x^{-1} \in \mathcal{U}$).

3.4 $\bar{A} = \cap\{U \cdot A \mid U \in \mathcal{U}\} = \cap\{A \cdot U \mid U \in \mathcal{U}\}$.

Definición: Un espacio topológico (X, τ) se dice T_0 si $\forall x \neq y \exists U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$, o $y \in U$ y $x \notin U$

3.5 Demuestre Que un grupo Topologico es T_0 si y solo si es Hausdorff.

3.6 Sean $(G_i)_{i \in I}$ grupos topológicos entonces en $\prod_{i \in I} G_i$ se define $(x_i) \cdot (y_i) := (x_i \cdot y_i)$. Demuestre que $\prod_{i \in I} G_i$ con este producto y la topologia producto es un grupo topológico.

Espacio Homogéneo y Grupo Cuociente

P4. Definición: Sea G un grupo topológico, H un subgrupo. Entonces G/H con la topologia cuociente se dice *Espacio Homogéneo*. Si H es *normal* entonces G/H es un *Grupo Cuociente*.

4.1 Demuestre que la función canonica es abierta.

4.2 Demuestre que si H es normal entonces G/H es un grupo topológico.

4.2 Sean G, F grupos topologicos $l : G \rightarrow F$ un morfismo. Entonces l es continua si y solo si l es continua en la identidad.

Topología producto de espacios metricos Numerables

P5. Sean $(X_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ espacios metricos. Demuestre que la topologia producto es metrizable. Para Esto

5.1 Demuestre que $\bar{d}_i := \min\{d_i, 1\}$ y d_i son equivalentes $\forall i \in \mathbb{N}$.

5.2 Defina

$$d(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{d}_n(x_n, y_n)}{2^{n+1}}$$

Y muestre que genera la topología producto.