Auxiliar #15 MA3801: Hahn-Banach y Espacios Vectoriales Topológicos

Profesor: Rafael Correa F.

Auxiliares: Gianfranco Liberona, Pedro Pérez, David Salas, Nikolas Tapia.

Teorema de Hahn-Banach en Dimensión Finita

P1. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^p$ un convexo no vacío, tal que, $0 \notin C$. La intención de este problema es mostrar que existe un hiperplano que separa a C de 0.

a) Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un conjunto denso en C . Defina

$$C_n := \text{conv}\{x_i : i = 0, \dots, n\} = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i x_i : t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

Pruebe que C_n es compacto y que $\bigcup C_n$ es denso en C .

b) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N} \exists f_n \in \mathbb{R}^p$ tal que $\|f_n\| = 1$ y $\langle f_n, x \rangle \geq 0 \forall x \in C_n$.

c) Pruebe que $\exists f \in \mathbb{R}^p$ tal que $\|f\| = 1$ y $\langle f, x \rangle \geq 0 \forall x \in C$. Concluya.

d) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^p$ dos convexos disjuntos demuestre que existe un hiperplano que los separa.

Topología Débil

P2. Sea (E, τ) un espacio vectorial topológico, $E^* := \{\ell : E \rightarrow \mathbb{R} : \ell \text{ es lineal y continua}\}$. Se define la *topología débil* denotada por $\sigma(E, E^*)$ como la topología inicial formada por E^* . Si $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ una red, $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(E, E^*)} x$ se denota por $x_\alpha \rightharpoonup x$.

Note que $B := \{\bigcap_{\ell \in I} \ell^{-1}(B(0, \varepsilon)) : I \in Pf(E^*), \varepsilon > 0\}$ es una base de vecindades del cero.

a) Pruebe que si $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ una red, entonces $x_\alpha \rightharpoonup x$ si y solo si $\ell(x_\alpha) \rightarrow \ell(x) \forall \ell \in E^*$.

b) Pruebe que si $x_\alpha \rightarrow x \Rightarrow x_\alpha \rightharpoonup x$.

c) Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, sea (x_n) una sucesión tal que $x_n \rightharpoonup x$. Entonces (x_n) es acotada y $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

d) Sea $x_n \rightharpoonup x$ y $\ell_n \xrightarrow{\|\cdot\|_*} \ell$, entonces $\ell_n(x_n) \rightarrow \ell(x)$.

Dual de un Espacio Vectorial Topológico

P3. Sea (E, τ) un espacio vectorial topológico, sea $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

a) ℓ es continua.

b) $\ker(\ell)$ es cerrado.

c) $\text{Ker}(\ell)$ no es denso.

d) ℓ es acotada en una vecindad del 0.

e) ℓ es continua en cero.

Unicidad de Espacios Finito Dimensionales

P4. Sea (F, τ) espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita. Demuestre que (F, τ) es isomorfo a $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tau_{|\cdot|} \otimes \tau_y)$ donde $\tau_y = \{\mathbb{R}^m, \emptyset\}$. Para esto haga lo siguiente.

a) Demuestre que un espacio vectorial topológico es separado si y solo si $\{0\}$ es cerrado. *Propuesto*

b) Demuestre que si E de un espacio vectorial topológico, L es un sub-espacio cerrado y G un sub-espacio de dimensión finita. Entonces $L + G$ es cerrado.

Hint: Utilice la topología cociente E/L y si $P : E \rightarrow E/L$ es la proyección canónica, entonces $G + L = P^{-1}(P(G))$.

c) Si F_1, F_2 son separados entonces $F_1 \oplus F_2$ es separado.

d) Sea $(e_i)_{i=1}^{n+m}$ una base de Hamel de F suponga que $F_1 := \langle (e_n)_{i=1}^n \rangle$ es separado y maximal. Demuestre que $\overline{\{0\}} = F_2 := \langle (e_j)_{i=n+1}^m \rangle$.

Hint: Razone por contradicción y use b).

e) Defina $\phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tau_{|\cdot|} \otimes \tau_y) \rightarrow (F, \tau)$, $\phi((a_i), (b_j)) = \sum_{i=1}^n a_i e_i + \sum_{i=n+1}^m b_i e_i$. Concluya