Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-5 Probabilidades y Estadística, Otoño 2011

Roberto Cortez
Víctor Carmi
Alfredo Torrico

Control 2

23 de mayo de 2011
Tiempo: 3 horas

P1. Sea X variable aleatoria de *Weibull* con parámetros $\lambda > 0$ y $k > 0$, es decir, su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

a) (1,5 ptos.) Muestre que $F_X(x) = [1 - e^{-(x/\lambda)^k}]\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$.

b) (1,5 ptos.) Muestre que la f.g.m. de la variable $\ln(X)$ es la función $\lambda^t\Gamma(1 + t/k)$. Recuerde que $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty e^{-y}y^{\theta-1}dy$.

c) (1,5 ptos.) Obtenga todos los momentos de X. Calcule su esperanza y varianza. Obtenga una expresión usando una serie de potencias para la f.g.m. de X. *Indicación:* examine qué repsesenta $M_{\ln(X)}(t)$.

d) (1,5 ptos.) Calcule la densidad de la variable $(X/\lambda)^k$. ¿Qué variable conocida es?

P2. *a*) (3,0 ptos.) Una persona dispara con arco y flecha a un blanco. Si la flecha llega a menos de 5cm del centro, se asignan 10 puntos; si está a más de 5cm y a menos de 15cm, se le asignan 5 puntos; y si está a más de 15cm y menos de 25cm, se le asignan 3 puntos. En otro caso, no se asignan puntos. Calcule la cantidad esperada de puntos, si se sabe que la distancia de la flecha al centro del blanco se distribuye uniformemente entre 0cm y 50cm.

b) (3,0 ptos.) Sean $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\nu, \tau^2)$ variables aleatorias independientes. Muestre que $Z = X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$. *Indicación:* calcule la densidad de Z mediante una propiedad conocida (sabiendo que una integral del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(y-B)^2}dy$, con A y B constantes, no depende del valor de B), o bien utilice la f.g.m. y sus propiedades (recordando que si W es normal entonces su f.g.m. es $e^{t\mathbb{E}(W)+\frac{1}{2}t^2\mathrm{var}(W)}$).

P3. *a*) En un banco llegan clientes a tasa de 3 por minuto. El valor esperado del tiempo que un cliente tarda en una caja es de 2 minutos. Hay 4 cajas, que atienden de manera independiente.

1) (1,0 pto.) ¿Cuál es la probabilidad de que en los próximos 2 minutos lleguen exactamente 4 clientes?

2) (1,0 pto.) ¿Cuál es la tasa de atención conjunta de las cajas?

3) (1,0 pto.) Suponga que surge una falla en el sistema computacional del banco, por lo cual las cajas dejan de atender clientes. El tiempo que tarda el sistema en volver a funcionar es una variable exponencial de parámetro $\lambda = 0{,}2$. ¿Cuál es el valor esperado de la cantidad de clientes que llegan al banco durante la falla del sistema?

b) Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2y^2}, & x \geq 1, y \geq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se definen las variables aleatorias $U = XY$, $V = X/Y$.

1) (1,5 ptos.) Muestre que la densidad conjunta de U y V es $f_{U,V}(u,v) = 1/(2u^2v)$ para $0 < 1/u \leq v \leq u$, y 0 en otro caso.

2) (1,5 ptos.) Encuentre las densidades marginales de U y V.