Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Ingeniería Matemática
31 de Marzo de 2011

Auxiliar 3 MA3403 : Probabilidades Condicionales y Variables Aleatorias Discretas

Profesor: Roberto Cortez
Auxiliares: Víctor Carmi, Alfredo Torrico.

Probabilidades Totales y Bayes

P1. Peters está decidido a entrar en el mundo de las apuestas, es por esto que se dirigió a uno de los casinos recientemente inaugurados en el país, Mixtor's Games, el cual propone un juego "secuencial" que consiste en apostar en máquinas tragamonedas que funcionan independientemente, cada una con una probabilidad $p > 0$ de entregar premio. Peters tiene acceso a la primera máquina, donde juega, pudiendo ganar o perder. Si gana debe cobrar su premio e irse del casino, pero si pierde debe jugar en la segunda máquina. Nuevamente, si gana cobra el premio y deja el casino, pero si pierde continúa en la tercera máquina, en la cual gana o pierde y se retira del casino. Considere los sucesos G_i :"Peters recibe el premio de la máquina i", $i = 1, 2, 3$.

(a) Explique por qué los sucesos G_i son disjuntos y pruebe que

$$\mathbb{P}(G_i) = p(1-p)^{i-1}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

(b) Calcule la probabilidad de que Peters no gane.

(c) Averigüe si G_1, G_2 y G_3 son o no pares de sucesos independientes.

(d) Sabiendo que Peters ha ganado, calcule la probabilidad de que el premio lo haya obtenido en la máquina i.

(e) Suponga que en lugar de 3 máquinas, hay infinitas máquinas funcionando como se describe arriba. Muestre que la probabilidad del suceso G :"Ganar premio" es 1, expresando G en términos de los G_i, $i = 1, 2, \ldots$

P2. Peters ahora quiere comprarse un auto nuevo, el cual cuesta N pesos, pero cuenta con un capital k obtenido en el casino, con $0 < k < N$, y para juntar lo que le falta, acepta el siguiente juego con su amigo Pipo: Peters lanza repetidamente una moneda equilibrada; si sale cara Pipo le paga 1 peso, y si sale sello, entonces Peters debe pagar 1 peso a Pipo. El juego termina cuando uno de los siguientes sucesos ocurre: Peters se queda con 0 pesos, o bien junta el dinero suficiente para comprarse el auto. ¿Cuál es la probabilidad de que quede sin dinero?

P3. Debido a que Pipo arruinó las ilusiones de Peters en el juego anterior, es por esto que ha decidido robar una valiosa obra de arte, para venderla a la mafia del "pequeño Toño" y así comprarse el auto que desea. Se sabe que el malhechor se encuentran en una de dos posibles regiones con igual probabilidad y que se comunica diariamente con algún mafioso. El GOPE está interfiriendo las comunicaciones en las dos regiones. Sin embargo, en caso de intercepción, estos son incapaces de determinar la región en que se originó la comunicación. En cada día, la probabilidad de que el GOPE intercepte la comunicación del malhechor es: si están en la región 1 es $p_1 = \frac{1}{2}$, y si están en la región 2 es $p_2 = \frac{1}{4}$. El rastreo se repite cada día. Asuma que el éxito o fracaso de dicho rastreo dado que Peters se encuentra en una región particular, es independiente día a día.

(a) Calcule la probabilidad de que Peters se encuentre en la región $i \in \{1, 2\}$ si se intercepta su comunicación el primer día.

(b) Calcule la probabilidad de que Peters esté en la $i-$ésima región si la primera intercepción es el $n-$ésimo dia. Evalue para $n = 2$ y $n = 3$.

(c) Para distraer al GOPE, Peters decide cada noche si se mueven a la otra región o no. Asuma que la decisión de moverse es independiente noche a noche. Si están en la región $i \in \{1, 2\}$, la probabilidad de cambiarse de región es q_i, donde $q_1 = \frac{1}{2}$ y $q_2 = \frac{1}{4}$. Calcule la probabilidad de que el malhechor se encuentre en la región i al comienzo del tercer día.

P4. Sea $A = \{1, 2, \ldots, N\}$. Se elige un subconjunto B de A y un punto $x \in A$, con reposición, de manera independiente y equiprobable, es decir, la elección de x es de forma equiprobable en A y la elección de B es de manera equiprobable en $\mathcal{P}(A)$. Calcule la probabilidad de que $x \in B$.

P5. En lo que sigue, sea $(\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

(a) Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de subconjuntos de Ω. Pruebe que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n),$$

y concluya que si $\mathbb{P}(E_n) = 1$ para todo $n \geq 1$ entonces $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = 1$.
Hint: Estudie $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}(E_n)$.

(b) Pruebe que si $\mathbb{P}(A) = 1$ entonces para todo $B \subseteq \Omega$ se tiene que A y B son independientes. Concluya que el mismo resultado se tiene en el caso que $\mathbb{P}(A) = 0$.

(c) Sean E y F dos conjuntos tales que $\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F) > 0$. Diremos que el evento F acarrea información negativa acerca de E, denotado por $F \downarrow E$, si $\mathbb{P}(E|F) \leq \mathbb{P}(E)$. Pruebe, o de un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

i) Si $F \downarrow E$, entonces $E \downarrow F$.

ii) Si $F \downarrow E$ y $E \downarrow G$, entonces $F \downarrow G$.

Variables Aleatorias Discretas

P1. Suponga que nuestro experimento consiste en lanzar 3 monedas equilibradas. Denotemos a Y la variable aleatoria asociada al número de caras que aparecen. Describa el espacio muestral, los valores que puede tomar Y, calcule $\mathbb{P}(Y = i)$, y encuentre la función de distribución asociada.

P2. El siguiente experimento consiste en sucesivos lanzamientos independientes de una moneda con probabilidad p que salga cara, el cual termina cuando sale una cara o se han hecho n lanzamientos. Si denotamos X la variable aleatoria asociada al número de lanzamientos, describa el espacio muestral, calcule $\mathbb{P}(X = i)$ y la función de distribución asociada.

P3. Sea X una variable aleatoria que distribuye como *geometrica*(p) muestre que:

$$\mathbb{P}(X > n + k | X > k) = \mathbb{P}(X > n)$$