

PAUTA AUX #1

PARA LOS QUE QUEDARON CON DUDAS, AQUÍ VA LA SOLUCIÓN DEL $\overline{P1}$

$\overline{P1}$

(a) PROBABILIDAD DE OBTENER UN PAR:

FORMA CON COMBINACIONES:

#CASOS TOTALES = $\binom{52}{5}$ { ELITO SUBCONJUNTOS DE TAMAÑO 5 DE UN TOTAL DE 52 CARTAS.

#CASOS FAVORABLES:

- PARA FORMAR UN PAR PRIMERO ELITO UNA CARTA DENTRO DE 13 "MONOS" Y QUIERO SUBCONJUNTOS DE TAMAÑO 2 DE UN TOTAL DE 4 PINTAS

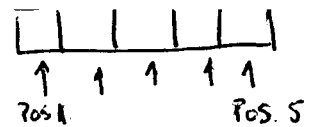
$$\Rightarrow 13 \binom{4}{2}$$

- AHORA ME QUEDAN 3 CARTAS POR RELLENAR CON 12 MONOS DISTINTOS, ENTONCES DE UN GRUPO DE 12 ELITO SUBCONJUNTOS DE TAMAÑO 3. PERO POR CADA CARTA QUE ELITA TENGO 4 PINTAS DISTINTAS POR LO TANTO TENGO OTRAS 4^3 "DERIVACIONES"

$$\Rightarrow \binom{12}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = \binom{12}{3} \binom{4}{1}^3$$

$$\therefore P(\text{"UN PAR"}) = \frac{13 \cdot \binom{4}{2} \binom{12}{3} \binom{4}{1}^3}{\binom{52}{5}}$$

FORMA CON PERMUTACIONES | VAMOSLO COMO UN ARREGLO



CASOS TOTALES: NECESITO ORDENAMIENTOS

DE 5 CARTAS DE UN TOTAL DE 52 ~~INDISTINGUIBLES~~ DISTINGUIBLES
ESTO SE SABE QUE ES

$$\frac{52!}{(52-5)!} = \frac{52!}{47!}$$

[LA CANTIDAD DE ORDENAMIENTOS DE LARGO k DE UN TOTAL DE M OBJETOS DISTINGUIBLES ES $\frac{M!}{(M-k)!}$]

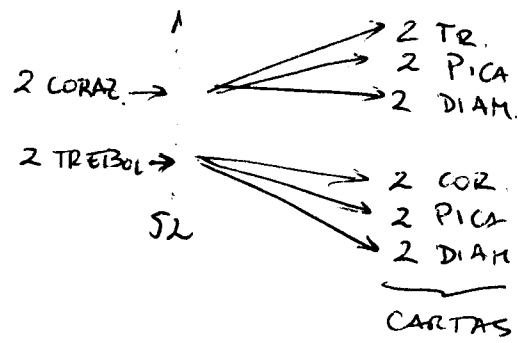
CASOS FAVORABLES:

- PRIMERO ESCOJO DE UN TOTAL DE 5 POSICIONES SUBCONJUNTOS DE TAMAÑO 2 DONDE SE UBICARÁ EL PAR DESEADO

$$\Rightarrow \binom{5}{2}$$

- EN LAS POSICIONES ESCOGIDAS PUEDO COLOCAR 52 CARTAS EN LA PRIMERA Y 3 EN LA OTRA (PORQUE HAY SOLO 4 TIPOS PARA CADA MONO). NOTAR QUE AQUÍ ESTOY DISTINGUIENDO EL HECHO QUE PRIMERO ME SALGA UN 2 DE CORAZONES Y LUEGO 2 DE TRÉBOL, Y AL REVÉS.

E, CARTAS PRIMERA POSICIÓN



$$\Rightarrow 52 \cdot 3.$$

- LUEGO NO PUEDO ELEGIR 4 CARTAS DEL MAZO (LAS DOS DEL PAR Y LAS OTRAS 2 QUE PODRÍAN HABER FORMADO EL PAR).

$$\Rightarrow 48 = 52 - 4$$

- LUEGO NO PUEDO ELEGIR OTRAS 4 CARTAS DEL MAZO (LA QUE RECIÉN ESCOGÍ Y LAS OTRAS 3 DEL MISMO TIPO DE MONEDA, ACORDARSE QUE TIENEN QUE SER DISTINTAS)

$$\Rightarrow 44 = 48 - 4$$

- LA MISMA LÓGICA ANTERIOR PARA LA ÚLTIMA CARTA

$$\Rightarrow 40 = 44 - 4$$

NOTA: LOS 3 ÚLTIMOS PUNTOS CONSIDERAN EL ORDEN DE LAS CARTAS ESCOGIDAS, FUNCIONA IGUAL A LO EXPLICADO CON EL PAR, PERO CON 3 CARTAS.

$$\therefore \# \text{ CASOS FAV: } 52 \cdot 3 \cdot \binom{5}{2} \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40$$

$$P(\text{"UN PAR"}) = \frac{52 \cdot 3 \cdot \binom{5}{2} \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40}{\frac{52!}{47!}}$$

OBS: COMPROBAR QUE LAS 2 PROBABILIDADES SON IGUALES.

(b) $P(\text{"UN TRÍO"})$ COMO LO ESENCIAL ESTÁ EXPLICADO EN EL CASO PAR, NO ENTRAREMOS EN DETALLES PARA LAS SEPTEN PARTES.

FORMA COMBINACIONES

$$\# \text{ ct.} = \binom{52}{5}$$

C.f.

- DE UN TIPO DE MONO (TOTAL SON 13) ELITO 3 CARTAS DE 4 PINTAS DISTINTAS.

$$\Rightarrow 13 \binom{4}{3}$$

- DE 12 MONOS DISTINTOS ESCOJO SUBCONTUNTOS DE TAMAÑO 2 PARA LAS OTRAS 2 CARTAS. ADEMÁS CONSIDERAR QUE TENGO 4 PINTAS POR CADA CARTA.

$$\rightarrow \binom{12}{2} 4^2 = \binom{12}{2} \binom{4}{1}^2$$

$$P(\text{"UN TRIO"}) = \frac{13 \binom{4}{3} \binom{12}{2} \binom{4}{1}^2}{\binom{52}{5}}$$

FORMA PERMUTACIONES:

$$\# \text{ C.f.} = \frac{52!}{(52-5)!} = \frac{52!}{47!}$$

- ESCOJO LOS LUGARES PARA EL TRÍO DE UN TOTAL DE 5 ESPACIOS.

$$\Rightarrow \binom{5}{3}$$

- EN LA PRIMERA CASILLA DE LAS ESCOGIDAS TENGO 52 OPCIONES, LUEGO 3, LUEGO 2.

$$\rightarrow 52 \cdot 3 \cdot 2$$

- IGUAL QUE PARA EL PAR, Y 4 ~~ME~~ TENGO 4 OPCIONES MENOS

$$\Rightarrow 48 \text{ OPCIONES ME QUEDAN}$$

- LUEGO TENGO OTRAS 4 OPCIONES MENOS $\Rightarrow 44$

$$\# C.f = \binom{5}{3} \cdot 52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 48 \cdot 44$$

$$P(\text{"un trió"}) = \frac{\binom{5}{3} \cdot 52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 48 \cdot 44}{\frac{52!}{47!}}$$

✓ VERIFICAR QUE SON IGUALES.

(c) $P(\text{"color"})$:

FORMA COMBINACIONES:

$$\# C.t = \binom{52}{5}$$

C.f: • ELITO UNA PINTA ENTRE 4. Y QUIERO SUBCONJUNTOS DE TAMAÑO 5 DE UN TOTAL DE 13 MONEDAS DISTINTOS PARA LA MISMA PINTA.

$$\Rightarrow 4 \binom{13}{5}$$

$$P(\text{"color"}) = \frac{4 \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$$

FORMA ~~de~~ PERMUTACIONES:

$$\# C.t = \frac{52!}{47!}$$

C.f: ELITO UNA CARTA DENTRO DE 52. LUEGO TENGO OTRAS 12 OPCIONES DE LA MISMA PINTA, LUEGO 11, DESPUÉS 10 Y FINALMENTE 9.

$$\Rightarrow 52 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$$

(OJO: QUE AQUÍ SE DISTINGUE EL ORDEN)

$$P(\text{"color"}) = \frac{52 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{\frac{52!}{47!}}$$

d) $P(\text{"2 PARES"})$

FORMA COMBINACIONES:

$$\# c.t. = \binom{52}{5}$$

c.f.: • ELITO ~~10~~ ^{DOS} MONOS DISTINTOS DENTRO DE 13 Y LUEGO SUBCONTUNTOS DE TAMAÑO 2 DE UN TOTAL DE 4 PARA FORMAR EL PRIMER PAR Y EL SEGUNDO PAR
 $\Rightarrow \binom{13}{2} \binom{4}{2}^2$

~~LUEGO SUCEDE LO MISMO PARA EL SEGUNDO PAR PERO CON OTRO MONO.~~
~~ES 12 $\binom{4}{2}$~~

• LUEGO ME QUEDAN 11 MONOS DISTINTOS A LOS ANTERIORES Y ESCOJO 1 PERO TENGO 4 PINTAS PARA EL.

$$\Rightarrow \binom{11}{1} 4 = \binom{11}{1} \binom{4}{1}$$

$$P(\text{"2 PARES"}) = \frac{\binom{13}{2} \binom{4}{2}^2 \binom{4}{2} \binom{11}{1} \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$$

FORMA PERMUTACIONES:

$$\# c.t. = \frac{52!}{47!}$$

#c.f.:

- ELIJO 4 POSICIONES DE UN TOTAL DE 5.
(SUBJETOS DE TAMAÑO 4 DE UN TOTAL DE 5 OBJETOS)
LUEGO ASIGNO A PRIMER PAR, SON 52 OPCIONES
Y LUEGO 3 DEL MISMO TIPO PARA EL SEGUNDO
PAR SON 48 OPCIONES (4 MENOS PORQUE YA OCUPA
UN MONO Y SUS 4 PINTAS), LUEGO NUEVAMENTE SON
3 OPCIONES

$$\Rightarrow 52 \cdot 3 \cdot 48 \cdot 3 \binom{5}{4}$$

- ELIJO LA ÚLTIMA CARTA (8 CARTAS MENOS)

$$\Rightarrow 44$$

$$\#c.f. = 52 \cdot 3 \cdot 48 \cdot 3 \binom{5}{4} \cdot 44.$$

$$P("2 \text{ PARES}") = \frac{52 \cdot 3 \cdot 48 \cdot 3 \binom{5}{4} \cdot 44}{52! / 47!}$$

IP("UN POKER")

FORMA ~~COMBINACIONES~~ COMBINACIONES:

$$\#c.f. \binom{52}{5}$$

- PUEDO ESCOGER DENTRO DE 13 MONOS Y A
SU VEZ CADA MONO TIENE 4 PINTAS.

$$\rightarrow 13 \cdot 4$$

- ESCOJO LA ÚLTIMA CARTA DENTRO DE 12 MONOS

$$P(\text{"UN POKER"}) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 4}{\binom{52}{5}}$$

FORMA PERMUTACIONES:

$$\# C.t = \frac{52!}{47!}$$

C.f: • PRIMERO ESCOTO UNA CARTA DENTRO DE 52.
LUEGO TENGO 3 OPCIONES, DESPUÉS 2 Y
FINALMENTE 1 (PARA QUE SEAN EL MISMO
NÚMERO). ADEMÁS ESCOJO LAS POSICIONES
PARA LAS 4 CARTAS DE UN TOTAL
DE 5 POSICIONES.

$$\Rightarrow 52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \binom{5}{4}$$

• DESPUÉS ESCOTO LA ÚLTIMA CARTA ENTRE 48.

$$\Rightarrow 48$$

$$\# C.f = 52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \binom{5}{4} \cdot 48$$

$$P(\text{"UN POKER"}) = \frac{52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \binom{5}{4} \cdot 48}{\frac{52!}{47!}}$$

AXIOMAS DE PROBABILIDAD

P4 (c) **PQD'** $(\Omega, \mathcal{P})$ no atómico. Muestre que $\forall \epsilon > 0 \quad \forall B \in \mathcal{P}$
con $P(B) > 0 \quad \exists A \in \mathcal{P}, A \subseteq B$ tq $0 < P(A) < \epsilon$.

HINT: MUESTRE EL RESULTADO PARA ϵ DE LA FORMA $P(B)/2^n$

LEM: PRIMERO VEAMOS QUE $\forall B \in \mathcal{P}$ con $P(B) > 0 \quad \exists A \in \mathcal{P}$

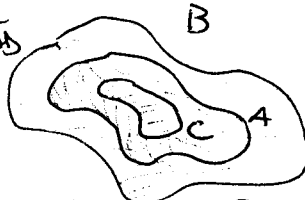
$$A \subseteq B \text{ tq } 0 < P(A) < \frac{P(B)}{2}$$

SUPONGAMOS QUE NO. SEA $B \in \mathcal{P}$ con $P(B) > 0$ y $\forall A \subseteq B$

SE TIENE QUE $P(A) \geq \frac{P(B)}{2} > 0$. DADO ESTO PODEMOS TOMAR

UN CONJUNTO $C \subseteq A \subseteq B$ QUE TAMBIÉN CUMPLE QUE

$$P(C) \geq \frac{P(B)}{2} > 0 \quad \swarrow \text{EXISTE POR NO ATOMICIDAD}$$



TOHEMOS LA SIGUIENTE PARTICIÓN DE B:

$$B = C \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus A) \quad \text{donde } A \setminus C \subseteq B \text{ y } B \setminus A \subseteq B$$

POIZ LO QUE $P(A \setminus C) \geq \frac{P(B)}{2}$ y $P(B \setminus A) \geq \frac{P(B)}{2}$
(ES LO QUE ESTAMOS SUPONIENDO)

$$\Rightarrow P(B) = P(C \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus A)) = P(C) + P(B \setminus A) + P(A \setminus C) \geq \frac{3P(B)}{2} \quad \star$$

ESTO NO PUEDE PASAR, POR LO TANTO SE TIENE QUE $\forall B \in \mathcal{P}$ con $P(B) > 0 \quad \exists A \subseteq B$ tq $0 < P(A) < \frac{P(B)}{2}$

PARA CONCLUIR LA DEMOSTRACIÓN BASTA TOMAR UNA SECUENCIA DE SUBCONJUNTOS DE B, ES DECIR, $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tq $A_i \subseteq B \quad \forall i$ y ADEMÁS ESTÁN ENCAJONADOS, $A_{i+1} \subseteq A_i \quad \forall i$ con $A_0 = B$

$$\Rightarrow 0 < P(A_{i+n}) < \frac{P(A_i)}{2}$$

DADO ESTO SE TIENE QUE

$\forall n \in \mathbb{N}$ {.

$$0 < P(A_n) < \frac{P(B)}{2^n}$$

ENTONCES SI NOS DAMOS UN $\epsilon > 0$ CUALQUIERA $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

(~~EN~~ UN INSTANTE)
QUE SE PASA LA
BARRERA DEL ϵ

EN QUE $\frac{P(B)}{2^{n_0}} < \epsilon$.

$$\Rightarrow 0 < P(A_{n_0}) < \frac{P(B)}{2^{n_0}} < \epsilon$$

POR LO TANTO TENEMOS UN $A_{n_0} \subseteq B$ tq

$$0 < P(A_{n_0}) < \epsilon$$

■