Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniera Matemática
17 de Marzo de 2011

Auxiliar 1 MA3403: Axiomas de Probabilidad y Combinatoria

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Víctor Carmi, Alfredo Torrico.

Combinatoria

P1. Una mano de póker consta de 5 cartas escogidas al azar del total de 52 que posee el mazo inglés. Calcule la probabilidad de obtener:

- **(a)** Color: las 5 cartas son de la misma pinta.
- **(b)** Un par: dos cartas tienen el mismo número entre sí, y las tres restantes tienen números distintos al resto y entre sí.
- **(c)** Dos pares: dos cartas tienen el mismo número entre sí, otras dos poseen el mismo número entre sí, pero distinto al anterior, y la última tiene un número distinto al resto.
- **(d)** Un trío: la misma lógica que un par.
- **(e)** Póker: cuatro cartas tienen el mismo número.

P2. Sea $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Se eligen con reposición, independientemente y de forma equiprobable, dos puntos x e y de A. Calcular la probabilidad de que $x = y$.

P3. Tres parejas, digamos A, B y C, se sientan en una fila. Suponga que todos los ordenamientos son igualmente probables.

- **(a)** Pruebe que hay $2^3 \cdot 3!$ ordenamientos distintos tales que todos los esposos quedan sentados junto a sus respectivas esposas.
- **(b)** Pruebe que la probabilidad que algún esposo se siente junto a su respectiva esposa es $2/3$.
  Indicación: Utilice el principio de inclusión/exclusión.

P4. De un grupo de n personas se elije un comité de tamaño j de entre los cuales se elige un subcomité de tamaño $i \leq j$. Obtenga una igualdad combinatorial calculando, de dos formas distintas, el número de posibles elecciones de comités y subcomités.

P5. Un elevador parte del subterráneo de un edificio de N pisos con m personas y el operador del elevador. Las m personas se bajan en uno de los N pisos. ¿De cuántas formas distintas puede haber percibido el operador que las personas se bajaban del ascensor en los siguientes casos?

- **(a)** Si el operador no es capaz de percibir diferencias entre las personas.
- **(b)** Si m es un múltiplo de N, el operador sólo es capaz de distinguir entre hombres y mujeres, hay igual cantidad de hombres que de mujeres, la misma cantidad de personas se baja en cada piso, y en cada piso sólo se bajan hombres o sólo mujeres.

Axiomas de Probabilidad

P1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

- **(a)** Sean $E, F \subseteq \Omega$ pruebe que:

$$\mathbb{P}(E \cap F) \geq \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 1.$$

(b) Dados $\{E_i\}_{i=1}^n \subseteq \Omega$ pruebe que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i) - (n-1).$$

P2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Considere $\{B_i : i = 1, \ldots, n\}$ una partición medible de Ω, es decir,

- $B_i \in \mathcal{F}$ $\forall i = 1, \ldots, n$.
- $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$.
- $\cup_{i=1}^m B_i = \Omega$.

Pruebe que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mathbb{P}(B_i) \leq \frac{1}{n}$.

P3. **(a)** Sean A y B dos sucesos. Pruebe que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B).$$

(b) Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$ una colección de sucesos relativos a un espacio muestral Ω, tales que $\mathbb{P}(A_i) = 1$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Pruebe que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = 1$.

P4. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Este se dice no atómico si $\forall B \subseteq \Omega$, con $\mathbb{P}(B) > 0$, $\exists A \subseteq \Omega$, $A \subseteq B$ tal que $0 < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$.

(a) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ no atómico y $x \in \Omega$. Muestre que $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$.

(b) Muestre que si Ω es numerable, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ no puede ser no atómico.

(c) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ no atómico. Muestre que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall B \subseteq \Omega$, con $\mathbb{P}(B) > 0$ $\exists A \subseteq \Omega, A \subseteq B$, tal que $0 < \mathbb{P}(A) < \varepsilon$.
Indicación: muestre el resultado para ε de la forma $\mathbb{P}(B)/2^n$.