FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA3403 - Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Prof. Auxiliar: Alberto V. Azócar
31 de marzo de 2010

Pauta Clase Auxiliar # 3

Problema 4 [Ley de Probabilidad].-
Diremos que una función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es ley de probabilidad (discreta), si cumple:

$$\begin{aligned} h(k) &\geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} && (1) \\ \sum_{k\in\mathbb{N}} h(k) &= 1 && (2) \end{aligned}$$

De las propiedades (1) y (2) se deduce inmediatamente que $h(k) \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

La propiedad (2) es general en el sentido que a veces se indica que el dominio de la función no son todos los naturales (es decir, se debe sumar en $A \subset \mathbb{N}$), pero esto debe quedar expreso o bien multiplicar con una indicatriz apropiada (como en la función g_n de la parte ii).

i.1)

Como $\lambda > 0$ se tiene que $\frac{\lambda^k}{k!} > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, además $exp(\cdot) > 0$, luego la función cumple la propiedad (1).

Ahora veamos (2)

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{N}} f(k) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda} \\ &= 1 \end{aligned}$$

i.2)

Primero se observa que por definición de ley

$$\mathbb{P}(X \geq \bar{k}) = \sum_{k \geq \bar{k}} f(k)$$

Expresemos la condición $\mathbb{P}(X \geq \bar{k}) = \mathbb{P}(X \leq \bar{k})$ en base a la función de distribución acumulada:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq \bar{x}) &= \mathbb{P}(X \leq \bar{k}) \\
\sum_{k=\bar{k}}^{\infty} f(k) &= \sum_{k=0}^{\bar{k}} f(k) \\
\sum_{k=\bar{k}}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} &= \sum_{k=0}^{\bar{k}} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
\sum_{k=\bar{k}}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\bar{k}} \frac{\lambda^k}{k!} \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} &= 2\sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda^{\bar{k}}}{\bar{k}!} \qquad (3) \\
e^{\lambda} &= 2\sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda^{\bar{k}}}{\bar{k}!}
\end{aligned}$$

En (3) se sumó el término $\sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \frac{\lambda^k}{k!}$ en ambos lados de la igualdad.

ii)
Si $k \in [1, n]$ la función $g_n(k)$ es $\ln(k) \geq 0$. Si $k \notin [1, n]$ la función es identicamente cero. Se tiene entonces la propiedad (1).

Para ver C_n que cumpla (2):

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}} g_n(k) &= C_n \sum_{k=1}^{n} ln(k) \\
&= C_n \ln(\prod_{k=1}^{n} k) \\
&= C_n \ln(n!)
\end{aligned}$$

Como la suma debe ser 1 ($\sum_{k\in\mathbb{N}} g_n(k) = 1$) para cumplir la propiedad (2) se concluye que

$$C_n = \frac{1}{\ln(n!)}$$

Claramente la función solo puede ser ley si $n > 1$.