

Clase Auxiliar # 3

Dependencia y Variables Aleatorias

Problema 1 [Porcentaje Como Probabilidad].- Un 40 % de los chilenos gusta de leer, mientras que un 60 % declara que le agrada bailar y a un 20 % le agrada leer y bailar.

i) ¿A qué porcentaje no le gusta ni bailar ni leer?

ii) ¿A qué porcentaje le gusta leer, pero no bailar?

Un estudio similar se realizó en California, donde se obtuvo que al 60 % le gusta bailar, al 20 % le gusta leer y bailar, en tanto que al 20 % le gusta leer, pero no bailar.

iii) Calcule usando probabilidades totales el porcentaje de los californianos les gusta bailar.

Problema 2 [Probabilidades Condicionales].- Una máquina puede sufrir solo fallas tipo 1 y tipo 2, el suceso de una falla no afecta que vuelva a ocurrir esta misma falla ni la del otro tipo. Cuando ocurre una falla es con probabilidad $p = \frac{1}{2}$ de tipo 1. Considere que han ocurrido dos fallas.

i) Si de las dos fallas ocurridas, se sabe que una fue tipo 1 ¿cuál es la probabilidad que la otra sea de tipo 2?

ii) Si se sabe que la primera falla en ocurrir fue tipo 1 ¿cuál es la probabilidad que la otra sea de tipo 2?

El encargado de máquinas observó una falla, pero no sabe si fue la primera o la segunda en ocurrir y pudo haber sido cualquiera equiprobablemente, pero pone las manos al fuego porque la falla observada es de tipo 1.

iii) ¿Cuál es la probabilidad (a priori) de que haya observado una falla tipo 1?

iv) ¿Cuál es la probabilidad de que la otra falla sea de tipo 2 (dado que se observó una falla tipo 1 “al azar”)?

Problema 3 [Variables Aleatorias].-

a) El valor de la acción de **Hermanos Aleatorios S.A.** puede tomar valores enteros $1, 2, \dots, 10$ cada día equiprobablemente y un valor mayor a 10 con probabilidad ε (donde obviamente $0 < \varepsilon < 1$). Decimos que la economía anda lenta si el valor es 2 o menor; regular si el valor está entre 3 y 7; buena si vale más de 7. Considere la variable aleatoria dada por:

$$X := \begin{cases} 0 & \text{si la economía está lenta} \\ 1 & \text{si está regular} \\ 2 & \text{si está buena} \end{cases}$$

i) Calcule $P(X = 0)$ y $P(X \geq 1)$, identifique el conjunto Ω de observaciones posibles.

ii) Considere a un inversionista supersticioso, Pepito, que solo venderá acciones si la economía está regular ó buena y además si lanza una moneda y ésta aterriza en cara. Para colmo la moneda de Pepito está cargada y se obtiene cara con probabilidad p . Calcule $P(Y = 1)$ donde:

$$Y := \begin{cases} 1 & \text{si Pepito vende} \\ 0 & \text{si Pepito no vende} \end{cases}$$

b) Un joven matrimonio tiene $n \in \mathbb{N}$ hijos. ¿Cuál es la probabilidad de que tengan al menos una hija mujer? ¿Cuál es la probabilidad de que tengan al menos $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ hijos varones?.

Problema 4 [Ley de Probabilidad].-

i.1) Pruebe que $f(k)$ es en efecto función (o ley) de probabilidad

$$f(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \lambda > 0$$

i.2) Pruebe que la condición sobre λ tal que para $\bar{k} \in \mathbb{N}$ se tenga $\mathbb{P}(X \geq \bar{k}) = \mathbb{P}(X \leq \bar{k})$, donde X es la variable aleatoria que tiene a $f()$ por ley viene dada por:

$$e^\lambda - \frac{\lambda^{\bar{k}}}{\bar{k}!} = 2 \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \frac{\lambda^k}{k!}$$

ii) Para $g_n(k)$ encuentre C_n de forma que $g_n()$ resulte función de probabilidad.

$$g_n(k) = C_n \cdot \ln(k) \mathbb{1}_{\{1 \leq k \leq n\}}$$

Nota: La función $f()$ es conocida como distribución de Poisson de parámetro λ , mientras que la función $g_n()$ no es particularmente famosa.