Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
24 de Marzo de 2011

Auxiliar 2 MA3403

Profesor: Raul Gouet B.
Auxiliares:Alberto V. Azocar, Franco Basso S., Francisco Castro A.

Problemas

P1. Axioma de probabilidad: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probalidad. Este se dice no atómico si $\forall B \subseteq \Omega$, con $\mathbb{P}(B) > 0$, $\exists A \subseteq \Omega, A \subseteq B$ tal que $0 < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$.

- **(a)** Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio no atómico y $x \in \Omega$. Muestre que $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$.
- **(b)** Muestre que si Ω es numerable entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ no puede ser no atómico.
- **(c)** Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio no atómico. Muestre que $\forall \epsilon > 0$, $\forall B \subseteq \Omega$, con $\mathbb{P}(B) > 0$ $\exists A \subseteq B$ tal que $0 < \mathbb{P}(A) < \epsilon$.
  Hint: Muestre el resultados para ϵ de la forma $\frac{\mathbb{P}(B)}{2^n}$.

P2. Combinatoria: Una mano de póker consta de 5 cartas escogidas al azar de un total de 52 que posee el mazo inglés. El joven Mixtor es un ferviente jugador de póker y esta interesado en calcular la probabilidad de obtener:

- **(a)** **Color:** Las 5 cartas son de la misma pinta.
- **(b)** **Un par:** Dos cartas tienen el mismo número entre sí, y las tres restantes tienen números distintos al resto y entre sí.
- **(c)** **Dos pares:** Dos cartas tienen el mismo número entre sí, otras dos poseen el mismo número entre sí, pero distinto al anterior, y la última tiene un número distinto al resto.
- **(d)** **Un trío:** La misma lógica que un par.
- **(e)** **Póker:** Cuatro cartas tienen el mismo número.

P3. Combinatoria: Tres parejas digamos A, B y C, se sientan en una fila. Suponga que todos los ordenamientos son igualmente probables.

- **(a)** Pruebe que hay $2^3 3!$ ordenamiento distintos tales que todos los esposos queden sentados junto a sus respectivas esposas.
- **(b)** Pruebe que la probabilidad de que algun esposo se siente con su respectiva esposa es $2/3$.
  Hint: Utilice el principio inlcusión/exclusión.

P4. Probabilidades condicionales: Debido a una mala racha en el póker, Mixtor y su secuaz Peters han decidido robar una valiosa obra de arte, para reducirla y así volver a jugar póker. Se sabe que los secuaces se encuentran en una de dos posibles regiones con igual probabilidad y que se comunican diariamente con un reducidor. La policía está interfiriendo las comunicaciones en las dos regiones. Sin embargo, en caso de intercepción la policía es incapaz de determinar la región en que se originó la comunicación. En cada día, la probabilidad de que la policía intercepte la comunicación de los malhechores, si estan en la región 1 es $p_1 = \frac{1}{2}$, y si están en la region 2 es $p_2 = \frac{1}{4}$. El rastreo se repite cada día. Asuma que el éxito o fracaso de dicho rastreo dado que los malhechores se encuentran en una región particular, es independiente día a día.

- **(a)** Calcule la probabilidad de que los malhechores se encuentren en la región $i \in \{1, 2\}$ si se intercepta su comunicación el primer día.
- **(b)** Calcule la probabilidad de que los secuaces estén en la $i-$ésima región si la primera intercepción es el $n-$ésimo día. Evalue para $n = 2$ y $n = 3$.

(c) Para distraer a la policía Mixtor y Peters deciden (cada noche) si se mueven a la otra región. Asuma que la decisión de moverse es independiente noche a noche. Si están en la región $i \in \{1, 2\}$, la probabilidad de cambiarse de región es q_i, donde $q_1 = \frac{1}{2}$ y $q_2 = \frac{1}{4}$. Calcule la probabilidad de que los malhechores se encuentren en la región $i \in \{1, 2\}$ al comienzo del tercer día.

P5. Probabilidades condicionales y Totales: Sea $A = \{1, ..., n\}$.

(a) Se eligen con reposición, independientemente y con ley equiprobable, dos puntos x e y de A. Calcular la probabilidad de que $x = y$.

(b) Se eligen un subconjunto B de A y un punto x de A, con reposición, de manera independiente y equiprobable, es decir, la elección de x es con ley equiprobable en A y la elección de B es con ley equiprobable en $\mathcal{P}(A)$ (cada subconjunto de A, incluyendo el conjunto vacío, tiene la misma probabilidad de ser escogido en $\mathcal{P}(A)$). Calcule la probabilidad de que $x \in B$.

Recuerde que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.
Hint: En b) puede serle util condicionar con respecto a la cardinalidad de B.