MA3403 Pauta P2C1

a) (2 puntos)

i)

$$P(J_i\ gane) = \frac{P(J_i\ gane \setminus J_k\ pierda\ \ \forall k < i) \cdot P(J_k\ pierda\ \ \forall k < i)}{P(J_k\ pierda\ \ \forall k < i \setminus J_i\ gane)}$$

Considerando que: $P(J_k\ pierda\ \ \forall k < i \setminus J_i\ gane) = 1$, entonces:

$$P(J_i\ gane) = P(J_i\ gane \setminus J_k\ pierda\ \ \forall k < i) \cdot P(J_k\ pierda\ \ \forall k < i)$$

$$P(J_i\ gane) = \frac{1}{n_i} \cdot P(J_{i-1}\ pierda \cap \ldots \cap J_1\ pierda)$$

$$P(J_i\ gane) = \frac{1}{n_i} \cdot P(J_{i-1}\ pierda \setminus J_k\ pierda\ \ \forall k < i-1) \cdot P(J_{i-2}\ pierda \setminus J_k\ pierda\ \ \forall k < i-2) \cdot \ldots \cdot P(J_1\ pierda)$$

$$P(J_i\ gane) = \frac{1}{n_i} \cdot \frac{n_{i-1}-1}{n_{i-1}} \cdot \frac{n_{i-2}-1}{n_{i-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{n_1-1}{n_1}$$

$$P(J_i\ gane) = \frac{1}{n_i} \cdot \prod_{k=1}^{i-1} \frac{n_k - 1}{n_k}$$

Para calcular la condición que deben cumplir los n_i tal que todos los jugadores tengan igual probabilidad de ganar, se tiene:

$$P(J_1\ gane) = \frac{1}{n_1}$$

$$P(J_2\ gane) = \frac{n_1 - 1}{n_1} * \frac{1}{n_2} = \frac{1}{n_1} = P(J_1\ gane)$$

$$\Longrightarrow n_2 = n_1 - 1$$

$$P(J_3\ gane) = \frac{n_1 - 1}{n_1} * \frac{n_2 - 1}{n_2} * \frac{1}{n_3} = \frac{1}{n_1} = P(J_1\ gane)$$

$$\Rightarrow n_3 = n_2 - 1 = n_1 - 2$$

Finalmente, por inducción, la condición queda definida por: $n_i = n_{i-1} - 1$

ii)

- (1 punto) Suponga que el jugador i no ganó. Calcule la probabilidad que el jugador j haya ganado

En este caso, el jugador *j* dependerá de los jugadores desde *i+1* hasta *j-1.* Tal que:

$$P\left(J_{j_{haya\ ganado}} \backslash J_{i_{perdió}}\right) = \frac{n_{i+1} - 1}{n_{i+1}} \cdot \frac{n_{i+2} - 1}{n_{i+2}} \cdot \ \dots \ \cdot \frac{n_{j-1} - 1}{n_{j-1}} \cdot \frac{1}{n_j}$$

- (1 punto) Suponga que el jugador 3 no tiene oportunidad de tratar de adivinar. Calcule la probabilidad de que el jugador 1 no haya ganado.

Dado que el jugador 3 no alcanza a jugar, significa que el 1 o el 2 ganaron. En este caso, la probabilidad de que el jugador 1 no haya ganado es equivalente a que el jugador 2 gane. Luego:

$$P(J_{1_{no\ haya\ ganadoo}} \backslash J_{3_{no\ alcanza\ \ a\ jugar}}) = \frac{n_1 - 1}{n_1} \cdot \frac{1}{n_2}$$

b) (2 puntos)

- Dado $0 < P(B \cap C) < P(B)$. Se pide demostrar que $0 < P(B \cap \bar{C}) < P(B)$

Descomponiendo P(B):

$$P(B) = P(B \cap C) + P(B \cap \bar{C}) \quad \textit{Dado que la intersección de ambos es vacía.}$$

$$P(B) - P(B \cap C) = P(B \cap \bar{C})$$

Tomando en consideración la hipótesis, se tiene que el lado izquierdo nunca llegará a ser 0 (pues $P(B \cap C) < P(B)$) y tampoco llegará a ser P(B) (pues $0 < P(B \cap C)$).

$\Longrightarrow 0 < P(B \cap \bar{C}) < P(B)$

- $P(A \backslash B \cap C) \cdot P(C \backslash B) + P(A \backslash B \cap \bar{C}) \cdot P(\bar{C} \backslash B)$

$$= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \cdot \frac{P(C \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B \cap \bar{C})}{P(B \cap \bar{C})} \cdot \frac{P(\bar{C} \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B \cap \bar{C})}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C})}{P(B)}$$

Dado que la intersección es vacía entre los dos términos del numerador se tiene:

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= P(A \backslash B)$$