Auxiliar 3: Variables Aleatorias

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Fernando Lema
Auxiliar: Antonio Lizama - Benjamín Palacios
01 de Abril de 2011

Resumen

Variable Aleatoria.
X se dice variable aleatoria, si $X : \Omega \to \mathbb{R}$
X se dice discreta si su imagen es un conjunto numerable.
X se dice continuea si su imagen es un intervalo de $\mathbb{R}$ (en el sentido amplio)

Función de Distribución.
Sea X una variable aleatoria.
$F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ se dice función de distribución de X, si $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

Función de Probabilidad. Sea X una variable aleatoria discreta. Su función de probabilidad asociada es:

$$p_k = \mathbb{P}(X = k)$$

Función de Densidad. Sea X una variable aleatoria continua. Su función de densidad asociada, denotada f_X, es aquella tal que $\mathbb{P}(X \in A) = \displaystyle\int_A f_X(x)dx$.
Observación:

$$\int_\Omega f_X(x)dx = \mathbb{P}(X \in \Omega) = 1$$

Problemas

P1. Suponga que un borrachito da un paso a la derecha con una probabilidad p, y a la izquierda con una probabilidad $1 - p$. Para modelar su movimiento supondremos que se posiciona sobre un número entero, comenzando en la posición $x = 0$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre en $x = 3$ tras 6 pasos?

b) Encuentre la distribución de probabilidad de la posición, x, después de n saltos.

P2. Sea X v.a. tal que $X \sim Binomial(n, p)$. Calcule $\mathbb{P}(X = k)$ cuando $n \longrightarrow \infty$, $p \longrightarrow 0$, y $np = \lambda$.

P3. *a*) Sea X una v.a. con función de distribución F conocida y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha \neq 0$. Calcule en términos de F, α, β, la función distribución de la v.a. $Y = \alpha X + \beta$.

b) Sea X una variable aleatoria Geométrica(p), con $p \in (0, 1)$. Pruebe que:

$$\mathbb{P}(X = n + k | X > n) = \mathbb{P}(X = k) \ \forall\ n \geq 0,\ k \geq 1$$

c) Mostrar que si A, B, son independientes, entonces A y $\bar{B}$ también lo son.

P4. Sea $\Omega = \{a_1, ..., a_k\}$.

a) Mostrar que $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$

b) Sean $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Calcular $\mathbb{P}(B \subseteq A)$.