Auxiliar 7: Probabilidades MA3401-1

Profesor: Raul Gouet
Auxiliar: Amitai Linker
25 de abril de 2011

Recuerde que, dado un vector aleatorio $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, podemos definir su transformación a través de $\phi := (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$, con $\phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, y su función de densidad conjunta está dada por

$$f_{\vec{Y}}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_{\vec{X}}(\phi - 1(y_1, y_2, \ldots, y_n))|det(J(y_1, y_2, \ldots, y_n))|$$

En que $J(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1}(\phi_1^{-1}) & \partial_{x_2}(\phi_1^{-1}) & \cdots & \partial_{x_n}(\phi_1^{-1}) \\ \partial_{x_1}(\phi_2^{-1}) & \partial_{x_2}(\phi_2^{-1}) & \cdots & \partial_{x_n}(\phi_2^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1}(\phi_n^{-1}) & \partial_{x_2}(\phi_n^{-1}) & \cdots & \partial_{x_n}(\phi_n^{-1}) \end{bmatrix} (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

P1. Usted decide juntarse con una persona que conoció por internet, con el fin de venderle su antiguo, obsoleto, y depreciado computador del año pasado. Usted quedó de juntarse en una plaza a las 12:00, y, al llegar a la plaza, esperar una cierta cantidad de tiempo k a la otra persona. Si alguno de los dos espera esa cantidad de tiempo y el otro no aparece, se marchará.

Considere que el tiempo de llegada de cada uno a la plaza es una variable aleatoria exponencial de parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente (ambas independientes)

(a) Utilice la transformación de variables aleatorias para demostrar que si X e Y son variables aleatorias con distribución conjunta $f_{X,Y}(x, y)$, entonces $X - Y$ tiene distribución

$$f_{X-Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u + v, v)dv$$

(b) Encuentre la función de densidad de $|X - Y|$ y la probabilidad de que, dado k fijo, usted se encuentre con el comprador

P2. Se arrojan dardos aleatoriamente en el plano. Cada lanzamiento puede modelarse como un vector aleatorio (X, Y), en que cada variable se distribuye como una normal de parámetros 0 y 1.

(a) Haga un cambio de coordenadas, de cartesianas a polares: $(X, Y) \to (R, \theta)$. Encuentre la distribución de (R, θ), y muestre que estas variables son independientes.

(b) Diremos que una variable aleatoria Z tiene distribución χ^2_k si su función de densidad es de la forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Muestre que esta distribución es un caso especial de una gamma, y demuestre que si $X \sim \chi^2_k$ y $Y \sim \chi^2_n$, son variables aleatorias independientes, entonces $X + Y \sim \chi^2_{k+n}$

(c) Muestre que si $X \sim N(0, 1)$, entonces $X^2 \sim \chi^2_1$. Concluya sobre la distribución de $X^2 + Y^2$ en la parte a)