

AUXILIAR 7: PROBABILIDADES MA3401-1

PROFESOR: RAUL GOUET
AUXILIAR: AMITAI LINKER
25 DE ABRIL DE 2011

P1. El propósito de este ejercicio es el de encontrar la distribución de la suma de algunas variables aleatorias de forma simple, utilizando la función generadora de momentos.

- (a) Muestre que si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes, también lo son las variables aleatorias $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$, donde $f_1, f_2, \dots, f_n$ son continuas.
- (b) Muestre que si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son independientes, entonces $\mathbb{E}(X_1 X_2 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(X_2) \cdots \mathbb{E}(X_n)$
- (c) Concluya que si M_Y es la función generadora de momentos de la variable aleatoria Y , entonces

$$M_{X_1+X_2+\cdots+X_n} = \prod_{i=1}^n M_{X_i}$$

- (d) Encuentre la función generadora de momentos de una variable distribuida como:
 - i. una normal
 - ii. una Poisson
 - iii. una exponencial
 - iv. una gamma
- (e) Utilice todo lo anterior para encontrar cómo se distribuyen
 - i. La suma de n variables independientes distribuidas como una normal
 - ii. La suma de n variables independientes distribuidas como una Poisson
 - iii. La suma de n variables independientes distribuidas como una normal de igual parámetro

P2. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} kx(x-y) & \text{si } 0 < x < 2, \ -x < y < x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- (a) Encuentre k para que esta función sea de densidad
- (b) Encuentre las funciones de densidad marginales para X e Y
- (c) Encuentre sus distribuciones condicionales

P3. En este ejercicio estudiaremos la siguiente distribución:

Diremos que Z tiene una distribución beta de parámetros $a, b > 0$ si se concentra en $[0, 1]$ y posee la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$. Puede probarse que esta función cumple

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Donde Γ corresponde a $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt$

Esta distribución generaliza la distribución uniforme en $[0, 1]$, siendo apropiada para modelar la distribución del porcentaje de algún valor

- (a) Muestre que $B(a, b) = B(b, a)$ y que $B(a+1, b) = \frac{a}{a+b} B(a, b)$
- (b) Sea Y con distribución $\beta(a, b)$. Encuentre su esperanza y su varianza.
- (c) En el reclamo del último control de probabilidades, usted pelea con el ayudante para que le suba algunas décimas. Como al ayudante le gusta el azar, decide lanzar una moneda, dándole a elegir cara (probabilidad p) o sello (probabilidad $1-p$). Si acierta, le subirá una décima en la pregunta, y si falla no podrá reclamar más.

El problema es que usted no sabe cuál es el parámetro p de la moneda, por lo que no sabe aún qué lado elegir. Averiguando encuentra que este parámetro (p) sigue una distribución $\beta(a, b)$ con $a < b$. ¿Qué debe elegir, y cuál es la probabilidad de acertar en este caso?

- (d) Calcule la probabilidad de acertar k veces