

AUXILIAR 6: PROBABILIDADES MA3401-1

PROFESOR: RAUL GOUET
AUXILIAR: AMITAI LINKER
18 DE ABRIL DE 2011

P1. Se ha descifrado un jeroglífico en las pirámides de Guiza que da cuenta del contacto de la civilización egipcia con seres alienígenas de un planeta cercano a Beta Pictoris. Estos alienígenas eventualmente viajaron a su planeta natal, pero aseguraron que otros seres de su planeta volverían al planeta Tierra.

- (a) Suponga que estos alienígenas no pueden mentir (luego, volverán a la Tierra en algún momento). Llame X a la variable aleatoria que indica el valor del tiempo T en que estos seres llegarán a la Tierra. Argumente por qué esta variable no tiene memoria:

$$\mathbb{P}(X \geq x + y | X \geq x) = \mathbb{P}(X \geq y)$$

- (b) Suponga ahora que la función de distribución de esta variable aleatoria es absolutamente continua. Demuestre que X tiene distribución exponencial
- (c) Sean X e Y dos variables aleatorias con distribución exponencial de parámetros λ_x y λ_y respectivamente. Si $\lambda_x < \lambda_y$, ¿qué puede decir sobre sus distribuciones?
- (d) Se han encontrado además, vestigios (Isla de Pascua, ruinas Mayas, Tibet, etc..) de contacto con alienígenas, todos de planetas distintos (nunca se conocieron), y que prometieron volver. En total hay n tipos distintos de alienígenas, y se considera la variable Z como el primer momento en que vuelve alguno de ellos a la Tierra. Encuentre la distribución de Z y concluya cómo afecta el número de alienígenas distintos a esta variable.

P2. El capitán de un barco turístico que recorre los lagos del sur comienza a abordar a los pasajeros que poseen su pasaje a las 12:00 en punto. Para evitar tener que navegar con poca luz, debe comenzar a navegar a más tardar a las 12:45. Sin embargo, cuando se venden muchos pasajes, siempre llega alguien después de las 12 : 45 (a más tardar a las 13 : 00).

Para tratar de dejar la menor cantidad de gente abajo, el capitán decide relajar un poco su horario de salida y embarcarse a las 13 : 00 menos $\frac{0 : 15}{n}$ donde n es la cantidad de pasajes vendidos

- (a) Suponga que cada pasajero tiene una probabilidad uniformemente distribuida entre las 12 : 00 y las 13 : 00 de llegar a embarcarse. Si cada pasajero llega independientemente de los demás, encuentre la probabilidad de que nadie llegue tarde cuando n es muy grande
- (b) Si ahora cada pasajero tiene probabilidad p de no llegar nunca, y probabilidad $1 - p$ de llegar a embarcarse (uniformemente entre las 12 : 00 y 13 : 00), encuentre la probabilidad de que nadie llegue tarde cuando n es muy grande. Encuentre la probabilidad de que todos lleguen a tiempo en tal caso
- (c) Si a las 12 : 45 no ha llegado nadie, y se han vendido n pasajes, encuentre la probabilidad de que no llegue nadie a abordar el barco

P3. Se tiene un tronco de largo L , el cual se corta en dos pedazos, teniendo el punto de corte X una distribución uniforme ($U(0, L)$). Luego, se corta el tronco de la derecha en dos pedazos, teniendo este segundo punto de corte Y , una distribución uniforme condicionada al tamaño del tronco obtenido ($U(0, L - X)$), esto es, la distribución de Y depende de X .

- (a) Calcule la distribución de Y
- (b) Calcule la probabilidad de poder construir un triángulo con los trozos obtenidos

P4. En la planta de Chimbarongo, la compañía Fat Baby produce su cereal Chocapig, utilizando para ello máquinas industriales. Parte del proceso consiste en introducir el grano de maíz en una máquina moladora (así nace Chocapig), que es muy eficiente, pero que de vez en cuando deja pasar granos sin moler. Tales granos poseen un tamaño, que consideraremos entre 0 y 1 (por conveniencia), y cada grano posee una distribución uniforme $(U(0, 1))$.

Usted, como buen probabilista, se da cuenta de que, el que un grano no sea molido es un evento raro, por lo que modela la cantidad de granos sin moler que aparecen en un día como una variable aleatoria Y con distribución de Poisson de parámetro λ .

- (a) Considere el tamaño máximo que alcanzan los granos en un cierto día, $Z = \max\{X_1, X_2, \dots, X_Y\}$, tomando el valor 0, cuando $Y = 0$. Encuentre la distribución de Z .
- (b) A usted le gustaría saber el parámetro λ de la distribución anterior, para poder controlar de forma eficiente los errores que comete la máquina. Para ello, usted inspecciona durante un par de semanas los granos que han salido de la máquina, y que se mueven por una tubería a 40 metros de la salida de la máquina, obteniendo que la distribución del grano de mayor tamaño es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < e^{-1} \\ 1 - \frac{1}{(xe)^5} & \text{si } e^{-1} \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Usted se da cuenta de que debido al trayecto que han recorrido los granos, se han desgastado, por lo que existe una función G estrictamente decreciente, de forma tal que usted ha estado midiendo $G(Z)$. Encuentre esta función G si sabe que $G(0) = 1$, y encuentre para este caso el valor de λ