Control 1 MA2G1, 2008

1. Encuentre la solución general de las ecuaciones:

(a) $y' = x^2(1+y)$.

(b) $x^3y' - xy = e^{-\frac{1}{x}}, \quad x > 0$.

(c) Encuentre una función continua en todo $\mathbb{R}$ y tal que:

$$y' = H(x)y, \quad x \neq 0, \quad \text{donde } H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $y' = 2\frac{y^2}{x^2} - y + x, \quad x > 0$.
Indicación: Verifique que una solución de la ecuación (ecuación de Ricatti) es $y_1(x) = \frac{1}{2}x^2$. *Luego use el cambio de variables:* $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$. *No es necesario calcular explícitamente las integrales que aparecen en la formula para* $z(x)$.

(b) $y' - 2xy = xy^3$.
Indicación: use el cambio de variables $u = y^{-2}$.

(c) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2x^2}{xy}$.
Indicación: Verifique que el cambio de variables $y(x) = xu(x)$ *reduce este problema a una ecuación con variables separables. Luego resuelva la ecuación.*

3. *Modelando un episodio de El Niño.*
Se puede modelar la intensidad u de las corrientes cálidas del Océano Pacífico en la dirección del Oeste al Este por la EDO:

$$u' = \sigma \Delta T - k(u - v(t)), \qquad t > 0$$

donde σ y k son constantes positivas, ΔT es la diferencia de temperatura del mar entre el Oeste y el Este y

$$v(t) = A(1 + \sin(\omega t)), \qquad A > 0, \ \omega > 0$$

es la intensidad de las contra-corrientes de Este al Oeste debidas al viento. Suponiendo que $\Delta T > 0$:

(a) Encuentre la solución general u de la EDO.

(b) Pruebe que, independientemente de la condición inicial, $u(t) > 0$ para un tiempo suficientemente grande. Esto se puede intrepretar como un sobrecalentamiento de las costas al Este en Sudamérica. *Indicación: puede usar que* $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.