MA2601-5- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
Profesor: Juan Campos.
Auxiliares: Carlos Román - Andrés Zúñiga.

Auxiliar 2

25 de Marzo de 2011

P1. Sean y_1, y_2 dos soluciones distintas de la ecuación de Riccati:

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0$$

donde p, q, r son funciones continuas dadas. Demuestre que cualquier otra solución y satisface:

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = Ce^{\int p(x)(y_2-y_1)dx} \quad \text{donde } C \in \mathbb{R}$$

Para ello suponga que y, y_1 e y_2 son funciones continuamente diferenciables.

P2. Considere para $x > 0$ la ecuación diferencial de Riccati:

$$y' - y^2 + \frac{y}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$$

(a) Encuentre una solución particular de la forma $y_p(x) = ax^b$.
(b) Encuentre la solución general.

P3. Resuelva las siguientes EDOs:
(a) $y' - \dfrac{3x^2y}{y+x^3} = 0$
hint: Considere el cambio de variables $y = z^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ a econtrar, de manera que la EDO resultante sea homogénea.
(b) $x^2y' - 2xy = 3y^4$

P4. Un líquido contaminado es vaciado a un contenedor de volumen fijo V a una tasa de $a(lt/seg)$. La concentración de contaminante es una constante $q(gr/lt)$. Denote por $y(t)$ la masa total del contaminante en el tanque en el tiempo t. Suponga que ciertas reacciones químicas que ocurren en el tanque neutralizan el contaminante, el cual decrece a una tasa de $by(t)$. El fluido tratado sale del contenedor a una tasa de $a(lt/seg)$. Suponga que $a, b, V, q > 0$ son constantes, y que la solución siempre está perfectamente mezclada.

(a) Encuentre una ecuación diferencial ordinaria para y.
(b) Resuelva la ecuación suponiendo que $y(0) = y_0 \geq 0$.
(c) Calcule $\lim_{t\to\infty} y(t)$, donde $y(t)$ es la solución encontrada en la parte (b).

P5. Comente acerca de la existencia y unicidad del siguiente problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = -\cos(x)y + \operatorname{sen}(x)\cos(x) = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Para ello utilice alguno de los teoremas de existencia y unicidad, demostrando sus hipótesis.

P6. Sea $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos el siguiente problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x,y) & x \in I \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

donde I es un intervalo simétrico que contiene al cero, f es impar en la variable x (esto es, $\forall x \in I, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(-x,y) = -f(x,y)$) y globalmente Lipschitziana en la segunda variable. Demostrar que la solución al problema es par.

P7. Propuesto: Mostrar que $f(y) = y^{2/3}$ no satisface la condición de Lipschitz cerca del origen.
Hint: Estudie la derivada de la función cerca de cero, y concluya utilizando el Teorema del Valor Medio.
Encuentre una solución no nula del problema

$$y' = y^{2/3}, \; y(0) = 0$$

Observe que la función nula es también solución. Combinando estas soluciones, demuestre que este problema admite infinitas soluciones.