MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2011-01
Profesor: Patricio Felmer.
Auxiliares: Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 04
1/abril

P1. Considere la ecuación de coeficientes constantes reales

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0 y = e^{\alpha x} cos(\beta x) \tag{1}$$

Sea $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ polinomio característico de (1), y suponga que $\mu = \alpha + i\beta$ es una raíz de multiplicidad 3, esto es, $p(\mu) = p'(\mu) = p''(\mu) = 0,\ p'''(\mu) \neq 0$. Demuestre que

$$y_p(x) = Re\left(\frac{x^3 e^{\mu x}}{p'''(\mu)}\right)$$

es una solución particular de la ecuación (1).
Indicación: pruebe mediante inducción que

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \ \ \frac{d^k}{dx^k}(x^3 e^{\mu x}) = e^{\mu x}(\mu^k x^3 + 3k\mu^{k-1}x^2 + 3k(k-1)\mu^{k-2}x + k(k-1)(k-2)\mu^{k-3}$$

P2. *Modelo Estelar.*
Una estrella esferoidal de radio $a > 0$ está compuesta por un fluido compresible cuya presión $p(r)$ y densidad $\rho(r)$ son funciones radiales ($0 \leq r \leq a$) tales que $p = k\rho^2$, con k constante positiva. Si $g(r)$ es la gravedad a una distancia r del centro de la esfera, entonces un balance de momentos y la ley de gravitación nos dan las relaciones

$$\begin{aligned} p' &= -g(r)\rho(r) \\ r^2 g(r) &= 4\pi G \int_0^r s^2 \rho(s) ds \end{aligned}$$

donde G es la constante de gravitación universal y las derivadas están tomadas con respecto a r.

(i) Deducir que ρ satisface la ecuación diferencial

$$r\rho'' + 2\rho' + \alpha^2 r\rho = 0, \qquad \alpha^2 = \frac{2\pi G}{k}$$

(ii) Determine $\rho(r)$ en términos de $\rho(0)$, la densidad del núcleo estelar.
Indicación: Resuelva para $r\rho$. Note que $\rho(r)$ debe ser positiva y finita si $r \to 0$.

(iii) Explique por qué este modelo predice estrellas de máximo tamaño $a = \dfrac{\pi}{\alpha}$