

MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2011-01**Profesor:** Patricio Felmer.**Auxiliares:** Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 10

30/mayo

P1. Considere la función definida en $[0, 2)$ por

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

donde f es tal que para $t \geq 2$, $f(t+2) = f(t)$. Calcule su transformada de Laplace.**P2.** (a) Encuentre la solución de la ecuación integral

$$y(t) = a \cos(t) - 2 \int_0^t \cos(t-u)y(u)du$$

(b) Resuelva la ecuación integro-diferencial

$$y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(\tau)d\tau = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1, \\ 2-t & 1 \leq t < 2, \\ 0 & 2 \leq t \end{cases}$$

(c) Para $n \geq 1$, demuestre las siguientes identidades

$$t^n * \sin(wt) = \frac{1}{w}(t^n - nt^{n-1} * \cos(wt)) \quad (1)$$

$$t^n * \cos(wt) = \frac{n}{w}t^{n-1} * \sin(wt) \quad (2)$$

P3. Resuelva el siguiente sistema de primer orden

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) - x_2(t) + e^t \cos(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + x_2(t) + e^t \sin(t) \end{cases}$$

con $x_1(0) = x_2(0) = 0$

P4. Sea $x(t)$ una solución no trivial del sistema:

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -4 & 4 & 11 \\ -3 & -9 & 8 \end{bmatrix} X(t)$$

Pruebe que $\|X(t)\|_2$ es una función creciente.

P5. Sea A una matriz simétrica de $n \times n$ a coeficientes constantes, y supongamos que $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable.

- (i) Demostrar que $\frac{d}{ds}([Ay(s)]^T y(s)) = 2[Ay(s)]^T y'(s)$
- (ii) Si y satisface la ecuación diferencial $y'' + Ay = 0$, demuestre que existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|y'(s)\|^2 + [Ay(s)]^T y(s) = C$$