MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2011-01
Profesor: Patricio Felmer.
Auxiliares: Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 09
27/mayo

P1. Sea $I = [t_0, t_0 + L]$ un intervalo cerrado y acotado. Dada una función continua $E : I \longrightarrow (0, \infty)$, se define la norma $\|\cdot\|_E$ en el especio $C^0(I)^m$ mediante

$$\|f\|_E = \sup_{t \in I} E(t)\|f(t)\|,$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclideana en $\mathbb{R}^n$. Decimos que una sucesión $\{f_n\}$ en $(C^0(I)^m, \|\cdot\|_E)$ es *de Cauchy* si

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n, k \geq N) \qquad \|f_n - f_k\|_E < \epsilon.$$

Por otro lado, una sucesión $\{f_n\}$ *converge* a una función $f \in C^0(I)^m$ si

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N) \qquad \|f_n - f\|_E < \epsilon.$$

(a) Demuestre que toda sucesión de Cauchy es convergente.

(b) Un operador $\mathcal{T} : C^0(I)^m \longrightarrow C^0(I)^m$ es *contractante* si

$$(\exists K \in (0, 1))\ (\forall f,\ g \in C^0(I)^m) \qquad \|\mathcal{T}(f) - \mathcal{T}(g)\|_E \leq K\|f - g\|_E.$$

Demuestre que si $\mathcal{T}$ es contractante, tiene un único punto fijo.

(c) Tomando $E(t) = e^{-2L(t-t_0)}$, pruebe que el operador $\mathcal{T} : C^0(I)^m \longrightarrow C^0(I)^m$ es contractante, donde $\mathcal{T}(X)$ es la función definida en I por

$$\mathcal{T}(X)(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))ds,$$

con $F \in C^0(I \times \mathbb{R}^m)$ una función Lipschitz con respecto a la segunda variable.

(d) Concluya que este operador tiene un único punto fijo.

P2. Una nave espacial ha sido atrapada por la fuerza gravitacional de un planeta que se encuentra en el origen. Los propulsores de la nave, debido a esta fuerza gravitacional, no actúan en una dirección fija. Llamando $x_i(t)$ a la posición de la nave según el eje x_i, $i = 1, 2, 3$, y $X = (x_1, x_2, x_3)^t$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$X' = \begin{bmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix} X$$

(a) Encuentre la solución del sistema anterior en función del parámetro $b \in \mathbb{R}$.

(b) ¿Para qué valores de b la nave escapará de la atracción del planeta? Es decir, independientemente de la posición inicial de la nave (que no puede ser $(0, 0, 0)$), se tiene que $\|x(t)\| \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

(c) En el caso que b cumpla la condición anterior, ¿cuál es la condición inicial para que la nave escape más rápido? Por qué con esta condición inicial la trayectoria de la nave es una línea recta?