MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2011-01
Profesor: Patricio Felmer.
Auxiliares: Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 08
26/mayo

P1. En lo que sigue, dados $U, V \in \mathbb{R}^n$, $\langle U, V\rangle$ denota el producto interno entre U y V . Observe que si identificamos los vectores de $\mathbb{R}^n$ con las matrices columna, entonces $\langle U, V\rangle = U^t V$.

(a) Pruebe que si $U, V \in C^1(I)^n$, entonces:

$$\frac{d}{dt}\langle U(t), V(t)\rangle = \langle U'(t), V(t)\rangle + \langle U(t), V'(t)\rangle$$

(b) Sean X_1 y X_2 soluciones del sistema lineal $X'(t) = AX(t)$, donde A es una matriz antisim'etrica ($A^t = -A$). Pruebe que si $\langle X_1(t_0), X_2(t_0)\rangle = 0$ entonces $\langle X_1(t), X_2(t)\rangle = 0$, para todo t.

P2. Considere la ecuación

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& f(t,x),\ t \in [0,T] \\ x(0) &=& x_0, \end{array}\right.$$

con f función continua en $[0,T]$, $T > 0$ y que satisface

$$|f(t,z_1) - f(t,z_2)| \leq |z_1 - z_2| \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R},\ t \in [0,T].$$

Sabemos que si partimos con una función continua ϕ_0, entonces la iteración de Picard

$$\phi_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \phi_n(s))ds,\ n > 0$$

converge a la solución de la ecuación. Dadas K y δ constantes positivas, suponga que ϕ_0 y ϕ_1 satisfacen

$$|\phi_1(t) - \phi_0(t)| \leq Kt^\delta, \quad t \in [0,T].$$

Demuestre que para $N \geq 3$:

$$|\phi_N(t) - \phi_1(t)| \leq MKt^{\delta+1} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{M^k t^k}{(\delta+1)(\delta+2)\cdots(\delta+k+1)},$$

y luego, usando que $\delta + 1 \geq 1$ y tomando $N \to \infty$, concluya que

$$(\forall t \in [0,T]) \quad |x(t) - \phi_1(t)| \leq MKt^{\delta+1}e^{Mt}.$$